N.V. EFIMOV

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

N. ÉFIMOV

ÉLÉMENTS de GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

4e ÉDITION REVUE

ÉDITIONS MIR·MOSCOU

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PLANE

Chapitre I. **Coordonnées sur la droite et dans le plan** 9

§ 1. Axe et segments d'axe 9
§ 2. Coordonnées sur la droite. Axe numérique 12
§ 3. Coordonnées cartésiennes orthogonales dans le plan. Notions sur les coordonnées cartésiennes obliques 15
§ 4. Coordonnées polaires 19

Chapitre II. **Problèmes élémentaires de géométrie analytique plane** 22

§ 5. Projections d'un segment. Distance de deux points 22
§ 6. Calcul de l'aire d'un triangle 28
§ 7. Division d'un segment dans un rapport donné 30
§ 8. Transformation des coordonnées cartésiennes lors de la translation parallèle des axes 34
§ 9. Transformation des coordonnées cartésiennes lors de la rotation des axes 36
§ 10. Transformation des coordonnées cartésiennes lors du déplacement de l'origine et de la rotation des axes 38

Chapitre III. **Equation d'une courbe** 41

§ 11. Notion d'équation d'une courbe. Exemples de courbes définies par des équations 41
§ 12. Exemples d'établissement d'équations de courbes données . . 47
§ 13. Intersection de deux courbes 50
§ 14. Equations paramétriques d'une courbe . . 52
§ 15. Courbes algébriques 53

Chapitre IV. **Courbes du premier degré** . . . 56

§ 16. Coefficient angulaire 56
§ 17. Equation d'une droite d'après son coefficient angulaire . . . 58
§ 18. Calcul de l'angle de deux droites. Conditions de parallélisme et de perpendicularité de deux droites 60
§ 19. La droite en tant que courbe du premier degré. Equation générale de la droite 63

§ 20. Equation incomplète du premier degré. Equation de la droite en fonction des coordonnées à l'origine 64
§ 21. Discussion du système formé par les équations de deux droites 67
§ 22. Equation normale de la droite. Calcul de la distance d'un point à une droite 70
§ 23. Equation d'un faisceau de droites 73

Chapitre V. **Propriétés géométriques des courbes du second degré** 77

§ 24. L'ellipse. Définition de l'ellipse et établissement de son équation canonique 77
§ 25. Discussion de la forme de l'ellipse 81
§ 26. Excentricité de l'ellipse 83
§ 27. Expressions rationnelles des rayons focaux de l'ellipse . . . 84
§ 28. Tracé de l'ellipse par points. Equations paramétriques de l'ellipse 85
§ 29. L'ellipse en tant que projection d'un cercle sur un plan. Ellipse en tant que section plane d'un cylindre de révolution . . . 86
§ 30. L'hyperbole. Définition de l'hyperbole et établissement de son équation canonique 89
§ 31. Etude de la forme de l'hyperbole 93
§ 32. Excentricité de l'hyperbole 99
§ 33. Expressions rationnelles des rayons focaux de l'hyperbole . . . 100
§ 34. Directrices de l'ellipse et de l'hyperbole 101
§ 35. La parabole. Etablissement de l'équation canonique de la parabole 104
§ 36. Discussion de la forme de la parabole 106
§ 37. Equations polaires de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole 109
§ 38. Diamètres des courbes du second degré 111
§ 39. Propriétés optiques de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole 116
§ 40. L'ellipse, l'hyperbole et la parabole en tant que sections coniques 117

Chapitre VI. **Simplification de l'équation générale d'une courbe du second degré** 119

§ 41. Notation standard de l'équation générale du second degré . . . 119
§ 42. Simplification de l'équation d'une courbe du second degré par transfert de l'origine des coordonnées au centre 120
§ 43. Forme réduite de l'équation d'une conique à centre 124
§ 44. Simplification de l'équation parabolique 133
§ 45. L'hyperbole en tant que représentation graphique de la proportionnalité inverse. La parabole en tant que représentation graphique du trinôme du second degré 139

Deuxième partie

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

Chapitre VII. **Quelques problèmes élémentaires de géométrie analytique dans l'espace** 142
§ 46. Coordonnées cartésiennes orthogonales dans l'espace 142
§ 47. Vecteur libre. Projection d'un vecteur sur un axe . . . 145
§ 48. Projections d'un vecteur sur les axes de coordonnées 149
§ 49. Cosinus directeurs 152
§ 50. Distance de deux points. Division d'un segment dans un rapport donné 153

Chapitre VIII. **Opérations linéaires sur les vecteurs** 155

§ 51. Définition des opérations linéaires 155
§ 52. Propriétés principales des opérations linéaires 156
§ 53. Différence de vecteurs 160
§ 54. Principaux théorèmes sur les projections 162
§ 55. Développement des vecteurs selon les vecteurs unitaires des axes de coordonnées dans l'espace 165

Chapitre IX. **Produit scalaire des vecteurs** 170

§ 56. Le produit scalaire et ses propriétés fondamentales 170
§ 57. Expression du produit scalaire à l'aide des coordonnées des vecteurs 173

Chapitre X. **Produits vectoriel et mixte des vecteurs** 177

§ 58. Le produit vectoriel. Ses propriétés fondamentales 177
§ 59. Expression du produit vectoriel en fonction des coordonnées des vecteurs 185
§ 60. Produit mixte de trois vecteurs 188
§ 61. Expression du produit mixte en fonction des coordonnées des vecteurs 192

Chapitre XI. **Equation d'une surface et équations d'une courbe** . . 194

§ 62. Equation d'une surface 194
§ 63. Equations d'une courbe. Problème de l'intersection de trois surfaces 195
§ 64. Equation d'une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'un des axes de coordonnées 196
§ 65. Surfaces algébriques 199

Chapitre XII. **Le plan en tant que surface du premier degré. Equations de la droite** 201

§ 66. Le plan en tant que surface du premier degré 201
§ 67. Equations incomplètes du plan. Equation du plan en fonction des coordonnées à l'origine 204
§ 68. Equation normale du plan. Distance d'un point à un plan . . 206
§ 69. Equations de la droite 210
§ 70. Vecteur directeur de la droite. Equations canoniques de la droite. Equations paramétriques de la droite 214
§ 71. Propositions supplémentaires et exemples 218

Chapitre XIII. **Surfaces du second degré. Transformation des coordonnées** 224
§ 72. Surfaces du second degré. Ellipsoïde et hyperboloïde 224
§ 73. Cône du deuxième ordre 231
§ 74. Paraboloïdes 233
§ 75. Cylindres du deuxième ordre 237
§ 76. Génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe. Constructions de V. Choukhov 239
§ 77. Eléments de la théorie générale des surfaces du second degré. Formules de transformation des coordonnées cartésiennes orthogonales dans l'espace 242
§ 78. Quelques conclusions d'ordre général découlant des formules de transformation des coordonnées 245
§ 79. Simplification de l'équation d'une surface du second degré au moyen du transfert du centre à l'origine des coordonnées . . . 246
§ 80. Réduction de l'équation d'une surface centrale du second degré à sa plus simple expression 250
§ 81. Réduction de l'équation d'une surface du second degré à sa plus simple expression pour le cas où $\delta = 0$ 261

Appendice. **Eléments de théorie des déterminants** 266

§ 1. Déterminants du deuxième ordre et systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues 266
§ 2. Système homogène de deux équations du premier degré à trois inconnues 270
§ 3. Déterminants du troisième ordre 273
§ 4. Compléments algébriques et mineurs 277
§ 5. Solution et discussion d'un système de trois équations du premier degré à trois inconnues 281
§ 6. Notions sur les déterminants d'ordre quelconque 288

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PLANE

CHAPITRE I

COORDONNÉES SUR LA DROITE ET DANS LE PLAN

§ 1. AXE ET SEGMENTS D'AXE

1. Soit une droite quelconque. Elle possède deux sens opposés. Choisissons à notre guise un de ces sens et convenons qu'il sera positif (nous appellerons le sens opposé sens négatif).

Nous donnerons le nom d'*axe* ou de *droite orientée* à cette droite dont nous avons « fixé » le sens positif. Sur les graphiques ce sens est indiqué par une flèche (voir par exemple fig. 1 l'axe *a*).

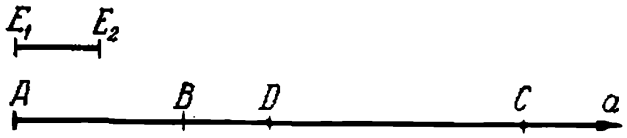


Fig. 1

2. Soit à présent un axe quelconque et un *segment unitaire* déterminé, c'est-à-dire une unité linéaire à l'aide de laquelle il est possible de mesurer tout segment et, partant, de déterminer la longueur de tout segment.

Choisissons sur l'axe donné deux points quelconques que nous désignerons par les lettres *A* et *B*. *Le segment limité par les lettres A et B est dit o r i e n t é si l'on a indiqué lequel des deux points est pris pour l'origine et lequel pour l'extrémité du segment. Ce segment est dit orienté dans le sens qui va de l'origine vers l'extrémité.*

Nous indiquerons dans le texte qui suit chaque segment par deux lettres surmontées d'un trait horizontal, notamment par les mêmes lettres qui limitent ce segment, la lettre désignant l'origine est placée

la première. Ainsi $\overline{AB}$ indique un segment orienté, limité par les points A, B, et dont l'origine est le point A ; $\overline{BA}$ indique un segment orienté, limité par les points A, B, dont le point B est l'origine.

Dans la suite de l'exposé nous omettrons souvent le terme « orienté » et dirons tout simplement « segment » à la place de « segment orienté ».

Nous convenons d'appeler grandeur d'un segment $\overline{AB}$ d'axe quelconque un nombre égal à sa longueur, affecté du signe « plus » si le sens de ce segment coïncide avec le sens positif de l'axe et du signe « moins » s'il coïncide avec le sens négatif de l'axe. Nous indiquerons la grandeur du segment $\overline{AB}$ par le symbole AB (sans trait horizontal). Le cas où les points A et B coïncident n'est pas exclu. Le segment $\overline{AB}$ est alors appelé *segment nul* car sa grandeur AB est nulle. Le sens d'un segment nul est indéterminé, et par conséquent un tel segment ne peut être appelé orienté que conventionnellement.

La grandeur d'un segment est un nombre relatif, en quoi elle se distingue de sa longueur; de toute évidence, la longueur d'un segment est le module de sa grandeur *. C'est pourquoi, en accord avec les symboles adoptés en algèbre pour indiquer le module d'un nombre, nous utiliserons pour la longueur du segment $\overline{AB}$ le symbole $|AB|$. Il est clair que $|AB|$ et $|BA|$ représentent le même nombre. Par contre, les grandeurs elles-mêmes, AB et BA, se distinguent par leur signe, et nous avons donc

$$AB = -BA.$$

La fig. 1 représente l'axe a et les points A, B, C, D sur cet axe; E_1E_2 est le segment unitaire. Les points A, B, C, D sont supposés situés de telle façon que la distance entre A et B est égale à deux, entre C et D à trois unités. Le sens de A à B coïncide avec le sens positif de l'axe, celui de C à D est opposé au sens positif de l'axe. Nous avons donc, dans le cas présent,

$$AB = 2, \quad CD = -3$$

ou

$$BA = -2, \quad DC = 3.$$

On peut écrire également

$$|AB| = 2, \quad |CD| = 3.$$

3. *Quels que soient les points A, B, C sur l'axe les grandeurs des segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{AC}$ sont liées par la relation*

$$AB + BC = AC; \tag{1}$$

nous appellerons cette relation *identité fondamentale.*

* Le mot « module » a la même signification que « valeur absolue ».

Nous allons démontrer l'identité fondamentale. Posons tout d'abord que les segments $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$, étant non nuls, sont orientés dans le m ê m e sens (fig. 2, en haut) ; la longueur du segment $\overline{AC}$ est alors égale à la somme des longueurs des segments $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ étant orienté dans le même sens que $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$. Dans ce cas, les trois nombres AB, BC et AC sont de même signe et le nombre AC est égal à la somme des nombres AB et BC, autrement dit l'identité (1) est vraie.

Supposons à présent que les segments $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$, étant non nuls, soient orientés en sens i n v e r s e l'un de l'autre (fig. 2, en bas). Le segment $\overline{AC}$ aura alors une

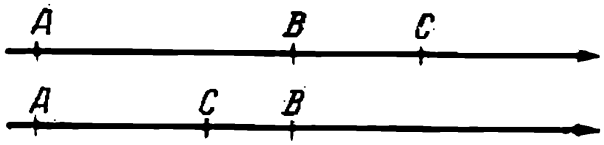


Fig. 2

longueur égale à la différence des longueurs des segments $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ et sera orienté dans le sens du plus long des deux segments. En ce cas les nombres AB et BC sont de signes contraires et le nombre AC aura un module, égal à la différence des modules des nombres AB et BC, son signe étant le même que celui de ces nombres dont le module est le plus grand. Par conséquent et conformément à la règle d'addition des nombres relatifs, pour cette position également le nombre AC est égal à la somme des nombres AB et BC, en d'autres termes l'identité (1) est vraie.

Supposons enfin que l'un des segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ soit nul. Si $\overline{AB}$ est un segment nul, le point B coïncide avec le point A, et par conséquent

$$AB + BC = AA + AC = 0 + AC = AC.$$

Si c'est $\overline{BC}$ qui est un segment nul, le point B est confondu avec le point C, et on a

$$AB + BC = AC + CC = AC + 0 = AC.$$

Ainsi donc, l'identité (1) est vraie pour toutes les positions des points A, B, C.

R e m a r q u e. Si dans la relation (1) les symboles AB, BC et AC étaient considérés simplement comme les l o n g u e u r s des segments correspondants (sans tenir compte des signes !), cette relation ne serait vraie que lorsque le point B est situé entre les

points A et C. Ce qui fait de l'identité (1) une relation universelle est justement cette circonstance que AB, BC et AC y sont interprétés comme les g r a n d e u r s des segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{AC}$, autrement dit, comme leurs longueurs prises avec le signe approprié *.

§ 2. COORDONNÉES SUR LA DROITE. AXE NUMÉRIQUE

4. Nous allons décrire un procédé à l'aide duquel la p o s i t i o n des p o i n t s sur une droite quelconque peut être déterminée par des n o m b r e s.

Soit une droite quelconque a. Choisissons un segment quelconque en qualité d'unité linéaire, fixons sur la droite a un sens positif (ce qui en fera un axe) et appelons O un point quelconque pris sur cette droite.

Ceci posé, *convenons d'appeler coordonnée de tout point M sur cet axe a la grandeur du segment $\overline{OM}$. Nous donnerons à O le nom d'origine des coordonnées; la coordonnée de O est égale à zéro.*

La coordonnée du point M détermine entièrement la position de ce point sur la droite donnée. En effet, le module de la coordonnée, c'est-à-dire OM, est la distance du point M au point O (fixé à l'avance), et le signe de la coordonnée, c'est-à-dire le signe du nombre OM, indique dans quel sens à partir de O se trouve le point M; si la coordonnée est positive, le point M se trouve dans le sens positif à partir du point O, si elle est négative, c'est dans le sens négatif qu'il faudra chercher le point M. Si enfin la coordonnée est nulle, le point M se confond avec le point O (tout cela découle directement de la définition de la grandeur du segment d'axe, voir n° 2).

Supposons que la droite a soit horizontale, le sens positif étant de gauche à droite. La disposition des points de la droite a en fonction de leurs coordonnées peut être alors décrite de la façon suivante: les points dont les coordonnées sont positives sont situés à droite de l'origine O des coordonnées, et les points dont les coordonnées sont négatives à gauche de l'origine des coordonnées O.

La coordonnée d'un point quelconque est habituellement indiquée par la lettre x. Dans les cas où plusieurs points sont pris en considération, on les indique souvent par la même lettre munie d'indices différents, par exemple M_1, M_2, ... , M_n; les coordonnées

* Si les segments ne sont pas pris sur un axe quelconque, mais sont considérés comme des segments quelconques sur le plan, il n'y a aucune raison d'attribuer à leurs longueurs un signe ou un autre. En ces cas, les longueurs des segments peuvent être indiquées comme en géométrie élémentaire, sans le symbole de module, ce que nous ferons d'ailleurs souvent dans la suite de notre exposé (voir par exemple n° 40 où la longueur du segment est indiquée par CM, et non par $|CM|$).

de ces points sont alors indiquées par une lettre munie des indices correspondants: $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$.

Pour indiquer symboliquement que le point donné possède la coordonnée indiquée, on inscrit cette coordonnée entre parenthèses à droite de la lettre qui indique le point envisagé, par exemple $M_1(x_1), M_2(x_2), \ldots, M_n(x_n)$.

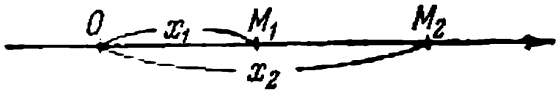


Fig. 3

Fig. 4

5. Démontrons à présent deux théorèmes simples mais importants. Ils se rapportent à l'axe sur lequel le système de coordonnées a été introduit.

Théorème 1. *Si l'on prend deux points quelconques de l'axe* $M_1(x_1)$ *et* $M_2(x_2)$, *l'égalité suivante sera toujours vraie*:

$$M_1M_2 = x_2 - x_1. \tag{1}$$

Démonstration. D'après l'identité fondamentale (n° 3),

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2.$$

D'où nous avons

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1.$$

Or, $OM_2 = x_2$, $OM_1 = x_1$. Il vient donc

$$M_1M_2 = x_2 - x_1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le sens de ce théorème pourrait également être exposé en ces termes: *pour obtenir la grandeur d'un segment de l'axe, il faut retrancher la coordonnée de l'origine de la coordonnée de l'extrémité de ce segment* (voir fig. 3 et 4; dans le cas de la fig. 4 il faut tenir compte du fait que la coordonnée x_1 est négative).

Théorème 2. *Si* $M_1(x_1)$ *et* $M_2(x_2)$ *sont deux points quelconques d'un axe et d la distance entre ces points, nous aurons*

$$d = |x_2 - x_1|. \tag{2}$$

Démonstration. D'après le théorème précédent

$$M_1M_2 = x_2 - x_1;$$

mais la distance entre les points M_1 et M_2 est le module de la grandeur du segment $\overline{M_1M_2}$, et par conséquent

$$d = |x_2 - x_1|,$$

ce qui démontre le théorème.

Remarque. Etant donné que les nombres $x_2 - x_1$ et $x_1 - x_2$ ont le même module, on peut écrire indifféremment $d = |x_2 - x_1|$ et $d = |x_1 - x_2|$. Vu ce qui vient d'être dit, on peut exposer le sens du théorème qui vient d'être démontré comme suit: *pour calculer la distance entre deux points de l'axe, il faut soustraire la coordonnée de l'un de la coordonnée de l'autre et prendre le module de la différence obtenue.*

Exemple 1. Soient les points $A(5)$, $B(-1)$, $C(-8)$, $D(2)$. Trouver la grandeur des segments $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ et $\overline{DB}$.

Solution. En vertu du théorème 1, nous aurons

$$AB = -1-5 = -6,$$
$$CD = 2-(-8) = 10,$$
$$DB = -1-2 = -3.$$

Exemple 2. Trouver la distance entre les points $P(3)$ et $Q(-2)$.

Solution. En raison du théorème 2,

$$d = |-2-3| = |-5| = 5.$$

6. Si un système de coordonnées a été introduit sur un axe quelconque, chaque point de cet axe possède une coordonnée bien déterminée. Inversement, on admettra que quel que soit le nombre (réel)

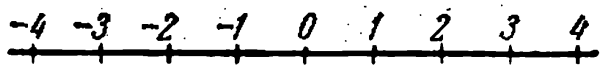


Fig. 5

x, il se trouvera toujours sur l'axe un point M bien déterminé possédant le nombre x pour coordonnée.

Nous convenons de dire que le point M *représente* le nombre x. L'axe sur lequel les coordonnées sont introduites d'après le procédé décrit au n° 4, de façon que ses points représentent tous les nombres réels, est appelé *axe numérique*. La fig. 5 représente l'axe numérique et plusieurs nombres entiers.

En convenant de représenter les nombres par des points nous rendons géométriquement évidente notre conception de l'ensemble des nombres. Nous obtenons en même temps la possibilité de représenter en termes géométriques des relations arithmétiques. Par exemple, toutes les solutions de l'inégalité $3 < x < 5$ peuvent être représentées par les points de l'axe numérique qui se trouvent entre deux points, dont l'un représente le nombre 3 (autrement dit, dont la coordonnée est 3) et l'autre le nombre 5 (c'est-à-dire dont la coordonnée est 5). La même proposition peut s'exprimer ainsi: les iné-

galités $3 < x < 5$ déterminent un intervalle (de l'axe numérique) limité par les points 3 et 5.

L'interprétation des relations arithmétiques en termes géométriques est très commode et on l'utilise constamment dans toutes les branches des mathématiques.

§ 3. COORDONNÉES CARTÉSIENNES ORTHOGONALES DANS LE PLAN. NOTIONS SUR LES COORDONNÉES CARTÉSIENNES OBLIQUES

7. Quand on détermine un procédé permettant de définir la position des points d'un plan d'après des nombres donnés on dit qu'on introduit un *système de coordonnées* dans ce plan. Examinons le système le plus simple et le plus usité de coordonnées planes, dit cartésien orthogonal.

Le système cartésien orthogonal de coordonnées est déterminé par le choix d'une unité linéaire pour la mesure des longueurs et de deux

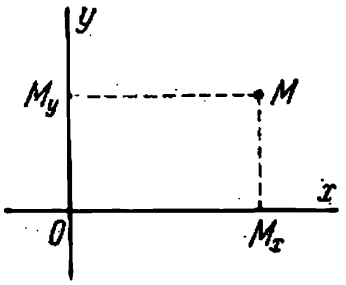


Fig. 6

axes perpendiculaires entre eux et numérotés dans un certain ordre (c'est-à-dire qu'on a indiqué quel est celui qui sera considéré comme le premier). Le point d'intersection des axes prend le nom d'*origine des coordonnées*, et les axes eux-mêmes les noms d'*axes des coordonnées*, le premier étant également appelé *axe des abscisses*, le second *axe des ordonnées*.

Nous assignerons la lettre O à l'origine des coordonnées, et nous désignerons l'axe des abscisses par les lettres Ox et l'axe des ordonnées par les lettres Oy. Sur les graphiques, les lettres x et y sont placées près des axes correspondants, dans le sens positif à partir de la lettre O, au point où les lignes représentant les axes s'interrompent. Par conséquent, la position même des lettres O et x sur le graphique indique l'orientation de l'axe des abscisses de même que la position des lettres O et y indique l'orientation de l'axe des ordonnées. Il sera donc possible d'omettre les flèches indiquant le sens positif des axes de coordonnées sans que cela prête à confusion.

Soit M un point quelconque du plan. Projetons le point M sur les axes de coordonnées, autrement dit abaissons du point M des perpendiculaires sur les axes Ox et Oy. Appelons les pieds de ces perpendiculaires M_x et M_y (fig. 6).

Les nombres

$$x = OM_x, \quad y = OM_y,$$

où OM_x *désigne la grandeur du segment* $\overline{OM}_x$ *de l'axe des abscisses et* OM_y *la grandeur du segment* $\overline{OM}_y$ *de l'axe des ordonnées, sont appelés coordonnées du point* M. *Le nombre* x *est appelé première coordonnée ou abscisse du point* M, *le nombre* y *est appelé deuxième coordonnée ou ordonnée du point* M. Pour indiquer symboliquement que le point M a une abscisse x et une ordonnée y on écrit $M(x; y)$. Lorsque nous aurons à considérer plusieurs points, nous les indiquerons par la même lettre affectée d'un indice, par exemple, $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Nous assignerons alors les mêmes indices aux coordonnées du point considéré, ce qui nous portera à écrire $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, ... , $M_n(x_n; y_n)$.

8. Un système cartésien orthogonal de coordonnées étant donné, chaque point dans le plan de ce système possède un couple bien défini et un seul de coordonnées x, y. Inversement, quels que soient deux nombres (réels) x, y, il se trouvera sur le plan un seul point bien défini, dont l'abscisse dans le système donné sera x et l'ordonnée y. Pour construire ce point d'après ses coordonnées x et y il faudra reporter sur l'axe des abscisses un segment $\overline{OM}_x$ de grandeur égale à x, sur l'axe des ordonnées un segment $\overline{OM}_y$ de grandeur y (le sens dans lequel ces segments doivent être pris est déterminé par les signes de x et y). Menant ensuite par les points M_x et M_y des droites parallèles respectivement aux axes Oy et Ox, nous obtiendrons à l'intersection de ces droites le point M.

9. Nous avons expliqué au n° 4 comment on introduit un système de coordonnées sur une droite. Introduisons à présent sur chacun des axes de coordonnées Ox et Oy un système de coordonnées, en conservant l'unité linéaire et les orientations des axes Ox et Oy qui nous sont données, et choisissant pour origine de chacun des axes le point O.

Considérons maintenant un point quelconque M et sa projection M_x sur l'axe Ox.

Le point M_x a sur l'axe Ox une coordonnée égale à la grandeur du segment $\overline{OM}_x$. Cette même grandeur a reçu (au n° 7) le nom d'abscisse du point M. Cela nous permet de conclure que *l'abscisse du point* M *est égale à la coordonnée du point* M_x *sur l'axe* Ox. *De même, l'ordonnée du point* M *est égale à la coordonnée du point* M_y *sur l'axe* Oy. Quelque évidentes que soient ces propositions, elles sont pour nous

d'une grande importance. Pour être plus précis, elles nous donnent le droit d'appliquer les théorèmes 1 et 2 (n° 5) exprimant certaines propriétés du système de coordonnées sur la droite quand il s'agit des points pris sur un plan.

10. Afin de rendre plus aisée la définition des faits qui suivront, nous convenons dès à présent de faire usage de certains termes.

L'axe Oy partage tout le plan en deux demi-plans. Nous appellerons celui de ces demi-plans qui contient la partie positive de l'axe Ox demi-plan *droit*, l'autre demi-plan *gauche*.

De même, l'axe Ox partage le plan en deux demi-plans. Nous appellerons celui qui contient la partie positive de l'axe Oy demi-plan *supérieur* et l'autre demi-plan *inférieur* *.

11. Soit M un point quelconque du demi-plan droit. Le segment $\overline{OM}_x$ sur l'axe Ox sera alors orienté dans le sens positif, et par conséquent, l'abscisse $x = OM_x$ du point M sera positive. Si, par contre, le point M se trouve dans le demi-plan gauche, le segment $\overline{OM}_x$ aura sur l'axe Ox un sens négatif et le nombre $x = OM_x$ sera négatif. Si enfin le point M est situé sur l'axe Oy, sa projection sur l'axe Ox coïncidera avec le point O et $x = \overline{OM}_x$ sera nul.

Par conséquent, *tous les points du demi-plan droit ont une abscisse positive* ($x > 0$), *tous les points du demi-plan gauche ont une abscisse négative* ($x < 0$), *les abscisses des points situés sur l'axe Oy sont nulles* ($x = 0$).

Le même raisonnement nous permet de conclure que *tous les points du demi-plan supérieur ont des ordonnées positives* ($y > 0$), *tous les points du demi-plan inférieur ont des ordonnées négatives* ($y < 0$), *les ordonnées des points situés sur l'axe Ox sont nulles* ($y = 0$).

Notons que l'origine des coordonnées O, en tant que point d'intersection des axes, a ses deux coordonnées nulles $x = 0$ et $y = 0$, ce qui la caractérise (autrement dit, s e u l le point O a ses deux coordonnées nulles).

12. L'ensemble des deux axes de coordonnées partage le plan en quatre parties, appelées quadrants et numérotées d'une façon déterminée. Le secteur se trouvant à droite de l'axe des ordonnées et au-dessus de l'axe des abscisses porte le numéro 1, le deuxième est celui qui se trouve dans le demi-plan supérieur à gauche de l'axe Oy, le troisième est situé simultanément dans les demi-plans gauche et inférieur, et enfin le quatrième est dans les demi-plans droit et inférieur. (Cette numération est indiquée sur la fig. 7.)

---

* Ces dénominations sont justifiées du fait que dans les graphiques on dispose ordinairement les axes de coordonnées de façon que l'axe Ox soit dirigé vers la droite et l'axe Oy vers le haut.

Soit M un point quelconque de coordonnées x, y.

Il découle de ce qui vient d'être énoncé que

si $x>0$, $y>0$, M est situé dans le quadrant I,

si $x<0$, $y>0$, M est situé dans le quadrant II,

si $x<0$, $y<0$, M est situé dans le quadrant III,

si $x>0$, $y<0$, M est situé dans le quadrant IV.

La prise en considération des demi-plans et quadrants est utile en ce sens qu'elle permet de s'orienter facilement dans la disposition des points donnés d'après les signes de leurs coordonnées.

13. Nous venons de faire connaissance avec le système de coordonnées cartésiennes orthogonales. C'est le système le plus usité.

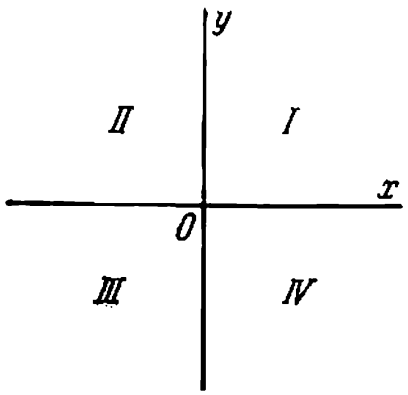


Fig. 7

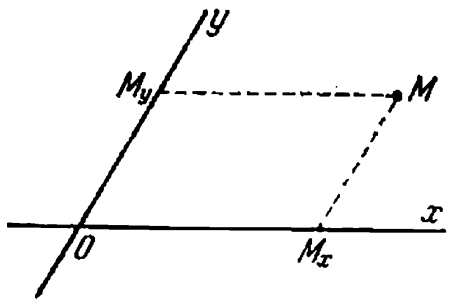


Fig. 8

Cependant, en certains cas, lors de l'examen de problèmes particuliers, d'autres systèmes peuvent s'avérer plus commodes. Examinons donc rapidement les coordonnées cartésiennes à angle quelconque entre les axes.

Un tel système de coordonnées est défini par une unité de mesure et deux axes Ox, Oy qui se coupent au point O sous un angle quelconque (autre que 0° et 180°). Soit M un point quelconque du plan. Traçons par M des droites parallèles aux axes Ox, Oy et désignons les points d'intersection de ces droites avec les axes respectivement par M_x et M_y (fig. 8).

Les nombres

$$x=OM_x \quad \text{et} \quad y=OM_y,$$

où OM_x est la grandeur du segment $\overline{OM}_x$ de l'axe Ox et OM_y la grandeur du segment $\overline{OM}_y$ de l'axe Oy, sont appelés coordonnées du point M dans le système donné.

Dans le cas particulier où l'angle entre les axes Ox et Oy est égal à un d r o i t, le système de coordonnées que nous venons de décrire

est appelé système cartésien orthogonal. Si, par contre, l'angle entre les axes Ox et Oy n'est pas droit, ce système de coordonnées est appelé cartésien oblique. Nous n'utiliserons pas dans notre exposé les coordonnées obliques, c'est pourquoi nous appellerons souvent les coordonnées cartésiennes orthogonales simplement coordonnées cartésiennes.

§ 4. COORDONNÉES POLAIRES

14. Nous allons décrire à présent le système dit de *coordonnées polaires*, qui est fort commode et est souvent appliqué.

Le système de coordonnées polaires est déterminé par un point O appelé *pôle*, une demi-droite OA issue de ce point, portant le nom

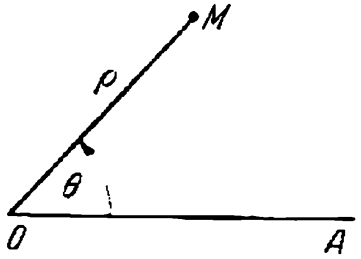


Fig. 9

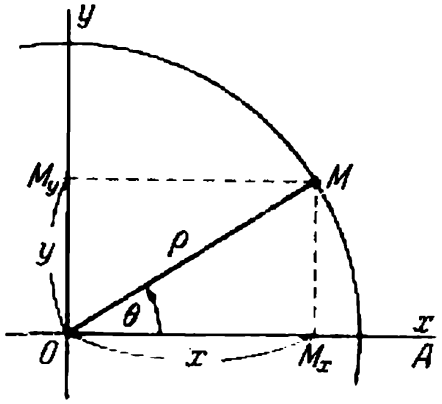


Fig. 10

d'*axe polaire*, et une unité de longueur. Il est de plus nécessaire d'indiquer lorsqu'on détermine un système de coordonnées polaires quel est le sens de rotation autour du point O que nous considérons comme positif. On considère habituellement comme positif le sens de rotation inverse du sens des aiguilles d'une montre.

Soient un pôle et un axe polaire (fig. 9). Envisageons un point M quelconque et désignons par ρ sa distance au point O ($\rho = |OM|$), par θ l'angle dont il faut tourner la demi-droite OA pour la faire coïncider avec la demi-droite OM ($\theta = \angle AOM$). Nous considérons l'angle θ comme on le considère en trigonométrie (c'est-à-dire en tenant compte du signe et à $\pm 2n\pi$ près).

On appelle les nombres ρ *et* θ *coordonnées polaires du point* M (*dans le système donné*); *le nombre* ρ *étant considéré comme première coordonnée ou rayon polaire, le nombre* θ *deuxième coordonnée ou angle polaire* (on appelle également l'angle polaire *amplitude*).

Remarque 1. On distingue parmi les valeurs possibles de l'angle polaire du point M une valeur particulière qui est

$$-\pi < \theta \leqslant \pi;$$

et que nous appellerons valeur principale. On pourrait dire que l'on prend en qualité de valeur principale de l'angle polaire l'angle dont il faut tourner la demi-droite OA pour la faire coïncider avec la demi-droite OM sans effectuer de rotation de plus de 180° dans l'un ou l'autre sens. Dans le cas particulier où la demi-droite OM est dirigée dans le sens rigoureusement opposé à celui de la demi-droite OA, la rotation de 180° est possible dans les deux sens; c'est le sens positif de rotation qui est alors choisi. Autrement dit, on prend alors pour valeur principale de l'angle polaire $\theta = \pi$.

Remarque 2. Si le point M coïncide avec O, nous aurons $\rho = |OM| = 0$. La première coordonnée du pôle est donc nulle, quant à sa deuxième coordonnée, il est évident qu'elle est indéterminée.

15. Il est parfois nécessaire d'utiliser simultanément les systèmes de coordonnées cartésiennes et polaires. Le problème qui se pose alors est le suivant: connaissant les coordonnées polaires d'un point, calculer ses coordonnées cartésiennes et inversement, connaissant les coordonnées cartésiennes calculer les coordonnées polaires. Nous allons déduire les formules permettant une telle transformation des coordonnées (formules de passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes et réciproquement) pour le cas particulier où *le pôle du système polaire coïncide avec l'origine des coordonnées cartésiennes orthogonales et l'axe polaire avec le demi-axe positif des abscisses* (fig. 10). Nous considérerons de plus comme positif lors de la détermination de l'angle polaire le sens de rotation qui nous permettra de parcourir le chemin le plus court pour faire coïncider le demi-axe positif Ox avec le demi-axe positif Oy.

Soit M un point quelconque du plan, $(x; y)$ ses coordonnées cartésiennes, $(\rho; \theta)$ ses coordonnées polaires. Décrivons autour du pôle O un cercle de rayon ρ et prenons-le pour cercle trigonométrique, l'axe Ox étant le diamètre d'origine. Abaissons du point M des perpendiculaires sur les axes Ox et Oy en désignant respectivement par M_x et M_y les points d'intersection de ces perpendiculaires avec les axes (voir fig. 10). Le segment $\overline{OM_x}$ représente le cosinus de l'angle θ. On a, par conséquent, $OM_x = |OM| \cos\theta$. Le segment OM_y représente le sinus de l'angle θ; on a, par conséquent, $OM_y = |OM| \sin\theta$. Or, $OM_x = x$, $OM_y = y$, $|OM| = \rho$.

Nous obtenons donc des relations précédentes:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta. \tag{1}$$

Telles sont les formules exprimant les coordonnées cartésiennes orthogonales à l'aide des coordonnées polaires. On peut obtenir l'expression des coordonnées polaires à l'aide des coordonnées

cartésiennes orthogonales soit à partir des formules déjà déduites, soit directement:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Remarquons toutefois que la formule $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$ ne détermine pas entièrement même la valeur principale de l'angle polaire. Encore faut-il savoir si la grandeur θ est positive ou négative.

Exemple. Soient $(-2; 2)$ les coordonnées cartésiennes orthogonales d'un point. Déterminer ses coordonnées polaires (en supposant que le pôle du système polaire coïncide avec l'origine du système cartésien et que l'axe polaire coïncide avec le demi-axe positif des abscisses).

Solution. D'après la formule (2) nous avons:

$$\rho = 2\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \theta = -1.$$

D'après la deuxième égalité $\theta = \frac{3}{4}\pi$ ou $\theta = -\frac{1}{4}\pi$. Etant donné que le point se trouve dans le deuxième quadrant, nous devons choisir la première des deux grandeurs ci-dessus en qualité de valeur principale. Nous obtenons donc $\rho = 2\sqrt{2}$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$.

CHAPITRE II

PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PLANE

§ 5. PROJECTIONS D'UN SEGMENT. DISTANCE DE DEUX POINTS

16. Dans le cours de notre exposé, lorsque nous poserons des questions quelles qu'elles soient, nous considérerons qu'un certain système de coordonnées est fixé. Si nous indiquons que des points quelconques sont donnés, il faudra le comprendre en ce sens que

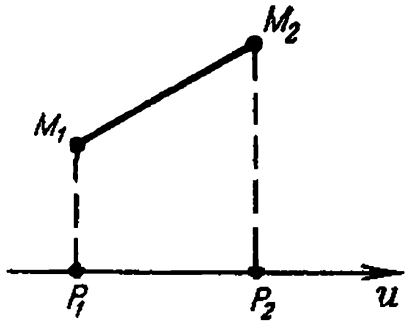


Fig. 11

leurs coordonnées sont connues. Si le problème posé consiste à trouver des points inconnus, le problème sera considéré comme résolu quand les coordonnées de ces points seront calculées.

Nous allons examiner dans ce chapitre plusieurs problèmes élémentaires de géométrie analytique.

17. Soient un segment quelconque $\overline{M_1M_2}$ et un certain axe u (fig. 11). Abaissons des points M_1 et M_2 des perpendiculaires sur l'axe u et désignons les pieds de ces perpendiculaires par P_1 et P_2 respectivement. Considérons le segment $\overline{P_1P_2}$ sur l'axe u dont l'origine et l'extrémité sont respectivement la projection de l'origine et la projection de l'extrémité du segment $\overline{M_1M_2}$. *La projection d'un segment* $\overline{M_1M_2}$ *sur l'axe u est la grandeur du segment* $\overline{P_1P_2}$ *de cet axe*, ce qui s'exprime symboliquement par l'égalité

$$\mathrm{Proj}_u \overline{M_1M_2} = P_1P_2.$$

Conformément à cette définition, *la projection d'un segment de droite sur un axe est un nombre* qui peut être positif (fig. 11), négatif (fig. 12, *a*) ou égal à zéro (fig. 12, *b*).

Il est particulièrement fréquent en géométrie analytique d'avoir à calculer les projections d'un segment de droite sur les axes de coordonnées. Nous convenons de désigner par la lettre majuscule X

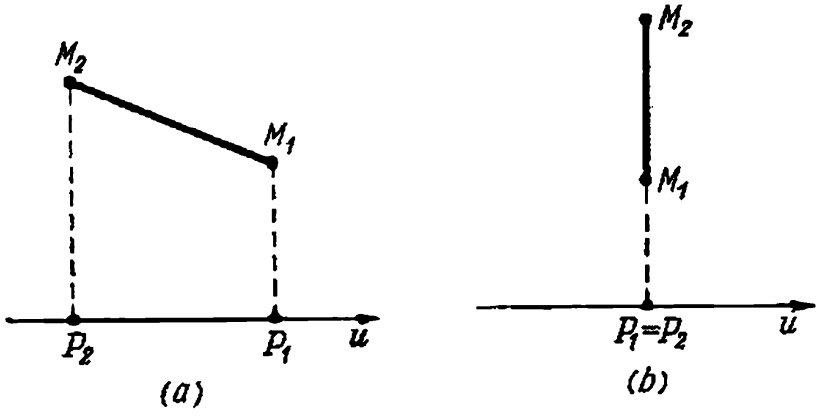


Fig. 12

la projection d'un segment quelconque sur l'axe Ox et par la lettre majuscule Y la projection sur l'axe Oy.

Le théorème suivant permet de calculer X et Y, les points M_1 et M_2 étant donnés.

Théorème 3. *Quels que soient les points* M_1 $(x_1; y_1)$ *et* M_2 $(x_2; y_2)$, *les projections du segment* $\overline{M_1M_2}$ *sur les axes de coordonnées s'expriment par les formules*:

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1. \tag{1}$$

Démonstration. Abaissons des points M_1 et M_2 des perpendiculaires sur l'axe Ox et désignons les pieds de ces perpen-

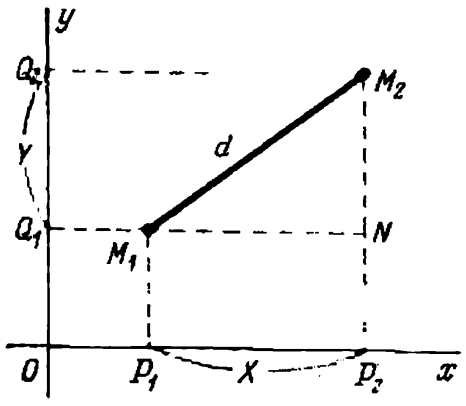


Fig. 13

diculaires par P_1 et P_2 (fig. 13). Comme indiqué au n° 9, les coordonnées de ces points sur l'axe Ox sont respectivement x_1 et x_2. D'où et en vertu du théorème 1, n° 5, nous avons

$$P_1P_2 = x_2 - x_1.$$

Or $P_1P_2 = X$, et par conséquent $X = x_2 - x_1$. Nous obtenons de façon identique l'égalité $Y = Q_1Q_2 = y_2 - y_1$, ce qui achève la démonstration de notre théorème.

Par conséquent, *pour obtenir les projections d'un segment de droite sur les axes de coordonnées il faut soustraire les coordonnées de son origine des coordonnées correspondantes de son extrémité.*

Supposons que l'origine M_1 de ce segment coïncide avec l'origine des coordonnées O. Nous aurons alors $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. En désignant dans ce cas l'extrémité du segment par la lettre M et les coordonnées du point M par les lettres x et y, nous obtenons d'après les formules (1)

$$X = x, \quad Y = y; \tag{1'}$$

dans ce cas X et Y sont les projections du segment $\overline{OM}$. Le segment $\overline{OM}$ qui joint l'origine des coordonnées à un point M donné est appelé *rayon vecteur de ce point.* Les formules (1') expriment ce fait évident que *les coordonnées cartésiennes orthogonales d'un point sont les projections de son rayon vecteur sur les axes de coordonnées.*

18. Un des problèmes élémentaires les plus fréquents en géométrie analytique est celui qui consiste à déterminer la distance entre deux points donnés. Pour le cas où ces points sont déterminés dans un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, la solution de ce problème est fournie par le théorème suivant.

Théorème 4. *Quelle que soit la disposition sur le plan des points* $M_1(x_1; y_1)$ et $M_2(x_2; y_2)$, *la distance d entre ces points est déterminée par la formule*:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{2}$$

Démonstration. En conservant les désignations utilisées dans le théorème précédent, nous désignerons de plus par la lettre N le point d'intersection des droites M_1Q_1 et M_2P_2 (fig. 13). Etant donné que le triangle M_1M_2N est rectangle, nous avons en vertu du théorème de Pythagore

$$d = \sqrt{M_1N^2 + M_2N^2}.$$

Mais il est évident que les longueurs des côtés de l'angle droit M_1N et M_2N coïncident avec les valeurs absolues des projections X et Y du segment $\overline{M_1M_2}$ sur les axes de coordonnées. On a

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Et nous obtenons enfin, en vertu du théorème 3,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exemple. Déterminer la distance entre les points $M_1(-2; 3)$ et $M_2(5; 4)$.

Solution. D'après la formule (2)

$$d = \sqrt{[5-(-2)]^2+(4-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

19. Considérons de nouveau le segment $\overline{M_1M_2}$. Menons à partir de son origine M_1, parallèlement à l'axe Ox et dans le même sens que cet axe, une demi-droite u (fig. 14). Désignons par θ l'angle

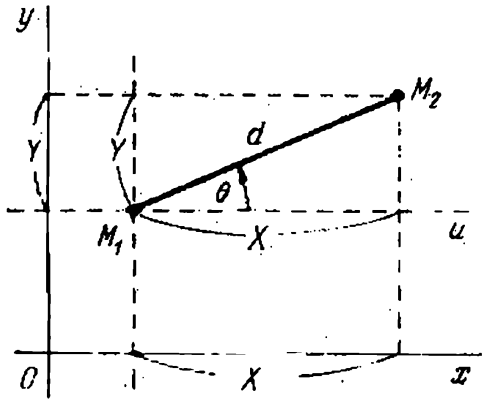


Fig. 14

dont il faut tourner la demi-droite u pour l'appliquer sur le segment $\overline{M_1M_2}$. Cet angle sera pris comme en trigonométrie (c'est-à-dire en tenant compte du signe et à $\pm 2n\pi$ près).

Nous appellerons l'angle θ *angle polaire du segment* $\overline{M_1M_2}$ par rapport aux axes de coordonnées donnés. Il est évident que l'angle θ n'est rien d'autre que l'angle polaire du point M_2 dans un système de coordonnées polaires dont le point M_1 est le pôle et la demi-droite u l'axe polaire. Dans ce même système, la longueur d du segment donné jouera le rôle de rayon polaire du point M_2.

Prenons à présent le point M_1 pour origine d'un nouveau système de coordonnées cartésiennes dont les axes sont orientés identiquement à ceux du système cartésien primitivement donné (fig. 14, les nouveaux axes sont tracés en pointillé). Les projections du segment $\overline{M_1M_2}$ sur les axes correspondants de l'ancien et du nouveau système sont identiques. Désignons-les, comme précédemment, par X et Y. Les nombres X et Y sont les coordonnées cartésiennes du point M_2 dans le nouveau système. En leur appliquant les formules (1) du n° 15 nous obtenons

$$X = d\cdot\cos\theta, \quad Y = d\cdot\sin\theta. \tag{3}$$

Les formules (3) *permettent d'exprimer les projections d'un segment de droite quelconque sur les axes de coordonnées par sa longueur et son angle polaire*

En vertu de ces formules et théorème (3), on a

$$x_2 - x_1 = d \cdot \cos\theta, \quad y_2 - y_1 = d \cdot \sin\theta, \tag{4}$$

ou encore

$$\cos\theta = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \sin\theta = \frac{y_2 - y_1}{d}. \tag{5}$$

Les formules (5) *permettent de déterminer l'angle polaire d'un segment de droite d'après les coordonnées de son extrémité et de son origine*; il convient de déterminer tout d'abord d en utilisant la formule (2).

En bien des cas il est également commode d'appliquer la formule

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{6}$$

qui se déduit aisément de la formule (4).

Exemple 1. Déterminer les projections d'un segment sur les axes de coordonnées, connaissant sa longueur $d = 2\sqrt{2}$ et son angle polaire $\theta = 135°$.

Solution. D'après les formules (3) nous avons

$$X = 2\sqrt{2} \cdot \cos 135° = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2,$$

$$Y = 2\sqrt{2} \cdot \sin 135° = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2.$$

Exemple 2. Déterminer l'angle polaire du segment joignant les points M_1 $(5\,;\ \sqrt{3})$ et M_2 $(6\,;\ 2\sqrt{3})$.

Solution. La formule (2) nous permet d'obtenir

$$d = \sqrt{(6-5)^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2} = 2.$$

En appliquant à présent les formules (5) nous trouvons

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La valeur principale de l'angle est donc $\theta = 60°$.

20. Soient u un axe *quelconque*, φ l'angle d'inclinaison d'un segment $\overline{M_1M_2}$ par rapport à cet axe ou, pour être plus précis, l'angle dont il faut tourner l'axe u pour le faire coïncider avec la droite porteuse du segment M_1M_2, orientée dans le sens du segment.

Nous nous servirons pour calculer les projections du segment de droite $\overline{M_1M_2}$ sur l'axe u de la formule

$$\operatorname{Proj}_u \overline{M_1M_2} = d \cdot \cos\varphi, \tag{7}$$

en d'autres termes, *la projection d'un segment de droite sur un axe quelconque est égale au produit de la longueur de ce segment par le cosinus de l'angle d'inclinaison de ce segment par rapport à l'axe envisagé.*

Il n'est pas nécessaire de prouver la formule (7) car elle ne se distingue pas en fait de la première des formules (3), n° 19. Remarquons seulement que le signe de l'angle n'influe pas sur son cosinus. *On peut donc considérer dans la formule* (7) *l'angle* φ *du point de vue de la géométrie élémentaire, c'est-à-dire sans tenir compte du signe et dans les limites de* 0 *à* 180°.

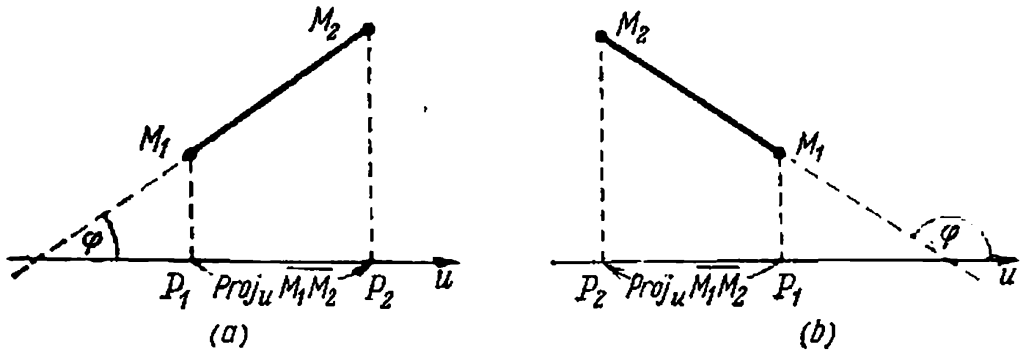


Fig. 15

Si l'angle φ est a i g u, cos φ et la projection du segment sont p o s i t i f s (fig. 15, *a*); si φ est un angle o b t u s, cos φ et la projection du segment sont n é g a t i f s (fig. 15, *b*). Si φ est un angle d r o i t la projection est nulle.

E x e m p l e. Soient les points M_1 (1 ; 1) et M_2 (4 ; 6). Déterminer la projection de $\overline{M_1M_2}$ sur l'axe passant par les points A(1 ; 0) et B (5 ; 3) et orienté de A vers B.

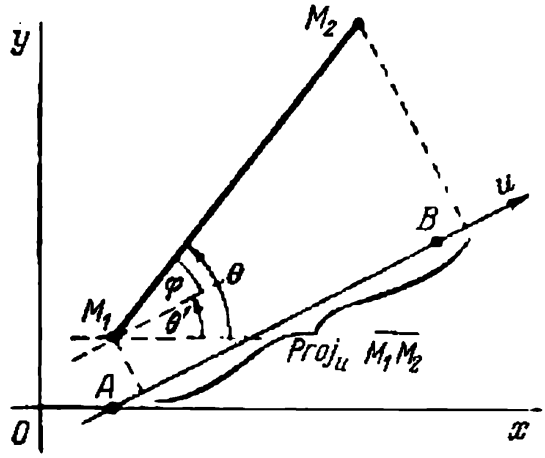


Fig. 16

S o l u t i o n. Désignons l'axe envisagé par u, l'angle entre le segment $\overline{M_1M_2}$ et l'axe u par φ et par θ et θ′ les angles polaires des segments $\overline{M_1M_2}$ et $\overline{AB}$ (voir fig. 16, où tous les angles envisagés sont tracés avec M_1 pour sommet). Il est facile de voir que $\cos \varphi = \cos (\theta - \theta')$. Soient X et Y les projections du segment $\overline{M_1M_2}$ sur les axes de coordonnées, X' et Y' les projections du segment $\overline{AB}$ et d et d' les longueurs des segments $\overline{M_1M_2}$ et $\overline{AB}$. D'après la formule (7)

$\text{Proj}_u \overline{M_1M_2} = d \cdot \cos\varphi = d \cdot \cos(\theta - \theta') = d \cdot (\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta')$.
En utilisant les formules (3), n° 19, nous recevons :

$$\text{Proj}_u \overline{M_1M_2} = d\left(\frac{X}{d}\cdot\frac{X'}{d'} + \frac{Y}{d}\cdot\frac{Y'}{d'}\right) = \frac{XX'+YY'}{d'}.$$

En appliquant les théorèmes 3 et 4, nous obtenons

$$X=3, \quad Y=5, \quad X'=4, \quad Y'=3, \quad d'=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

Il s'ensuit :

$$\text{Proj}_u \overline{M_1M_2} = \frac{3\cdot 4+5\cdot 3}{5} = \frac{27}{5}$$

et le problème est résolu.

§ 6. CALCUL DE L'AIRE D'UN TRIANGLE

21. Soient trois points $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$ et $C(x_3; y_3)$, qui ne sont pas situés sur la même droite. *Etablissons la formule qui exprimera l'aire S du triangle ABC à l'aide des coordonnées de ses sommets.*

Désignons par φ l'angle entre les segments $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$, par d et d' les longueurs de ces portions de droites. La géométrie élémen-

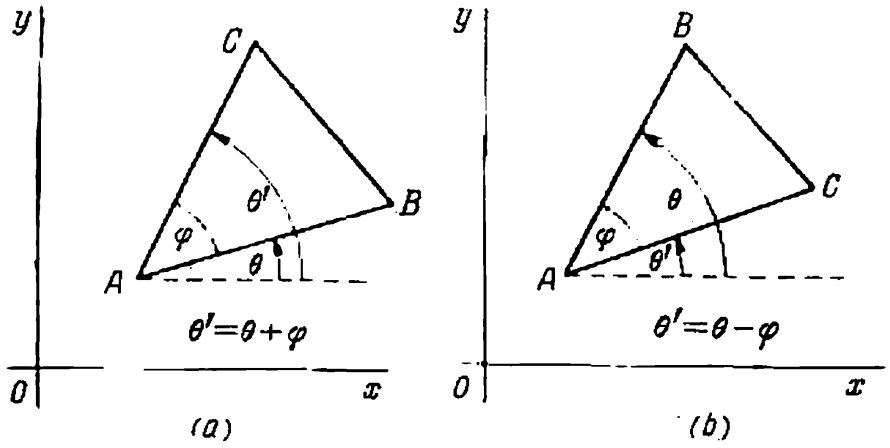


Fig. 17

taire nous dit que l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de deux de ses côtés par le sinus de l'angle qu'ils forment. Nous avons donc

$$S = \frac{1}{2} dd' \cdot \sin\varphi. \tag{1}$$

Soit θ l'angle polaire du segment $\overline{AB}$. Si l'angle φ de rotation minimum permettant d'appliquer $\overline{AB}$ sur $\overline{AC}$ est positif, nous obtiendrons l'angle polaire du segment $\overline{AC}$ en ajoutant l'angle φ à θ. En le désignant par θ', nous trouvons $\theta' = \theta + \varphi$ (fig. 17, *a*).

Si par contre cette rotation minimum doit s'effectuer dans le sens négatif, nous obtiendrons l'angle polaire θ' du segment $\overline{AC}$ en retranchant l'angle φ de l'angle θ. Dans ce cas $\theta' = \theta - \varphi$ (fig. 17, *b*). Il vient donc $\varphi = \pm(\theta' - \theta)$, d'où nous trouvons d'après la formule (1)

$$S = \pm\frac{1}{2} dd' \cdot \sin(\theta' - \theta) = \pm\frac{1}{2} dd' \cdot (\sin\theta' \cos\theta - \cos\theta' \sin\theta). \quad (2)$$

Désignons par X et Y les projections du segment $\overline{AB}$ sur les axes de coordonnées et par X' et Y' les projections du segment $\overline{AC}$. En vertu des formules (3), n° 19, nous obtenons

$$X = d \cdot \cos\theta, \qquad Y = d \cdot \sin\theta,$$
$$X' = d' \cdot \cos\theta', \quad Y' = d' \cdot \sin\theta'.$$

En ouvrant les parenthèses dans le second membre de l'égalité (2) et en utilisant les relations ci-dessus nous trouvons

$$S = \pm\frac{1}{2}(XY' - X'Y). \quad (3)$$

En vertu du théorème 3, n° 17

$$X = x_2 - x_1, \qquad Y = y_2 - y_1,$$
$$X' = x_3 - x_1, \quad Y' = y_3 - y_1.$$

En substituant ces valeurs aux grandeurs correspondantes de la formule (3) nous obtenons

$$S = \pm\frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]. \quad (4)$$

L'expression entre crochets est un déterminant du second ordre *, ce qui permet également d'écrire la formule (4) comme suit

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Nous exprimons le résultat obtenu par le théorème suivant :

Théorème 5. *Quels que soient trois points* $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ et $C(x_3; y_3)$ *non situés sur une même droite, la surface* S *du triangle* ABC *est déterminée par la formule* (5). *La partie droite de cette formule est égale à* $+S$ *si la rotation minimum du segment* AB *vers le segment* AC *est positive et à* $-S$ *si cette rotation doit s'effectuer dans le sens négatif.*

* Voir Appendice, page 266.

Exemple. Soient les points $A(1 ; 1)$, $B(6 ; 4)$, $C(8 ; 2)$. Calculer la surface du triangle ABC.

Solution. D'après la formule (5)

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -8 = -S.$$

Par conséquent, $S = 8$. Le fait que dans le cas présent la valeur de la partie droite de la formule (5) est négative indique que la rotation minimum du segment $\overrightarrow{AB}$ vers le segment $\overrightarrow{AC}$ s'effectue dans le sens négatif.

§ 7. DIVISION D'UN SEGMENT DANS UN RAPPORT DONNÉ

22. Un problème élémentaire de géométrie analytique aux applications nombreuses consiste à diviser un segment suivant un rapport donné. Avant d'énoncer le problème

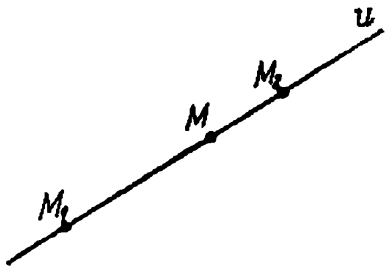


Fig. 18

d'une façon précise il nous faudra expliquer en détail ce que nous entendons par l'expression « *le rapport dans lequel un point quelconque partage un segment donné* ».

Soient sur un plan deux points différents quelconques dont l'un est considéré comme le premier et l'autre comme le deuxième. Désignons-les, dans l'ordre indiqué, par M_1 et M_2. Traçons une droite u passant par ces deux points et fixons sur cette droite un sens positif, ce qui en fera un axe.

Soit ensuite M un autre point de l'axe u disposé de façon quelconque, pourvu qu'il ne coïncide pas avec le point M_2 (fig. 18).

Le nombre λ, *déterminé par l'égalité*

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} \qquad (1)$$

où M_1M *et* MM_2 *sont les grandeurs des segments orientés* $\overline{M_1M}$ *et* $\overline{MM_2}$ *de l'axe* u, *est appelé rapport dans lequel le point* M *partage le segment orienté* $\overline{M_1M_2}$.

Remarque 1. Le nombre λ ne dépend pas du choix du sens positif de la droite u, déterminée par les points M_1 et M_2. En effet si nous intervertissons les sens positif et négatif de cette droite, les grandeurs M_1M et MM_2 changeront de signe simultané-

ment (leur module restant inchangé). La valeur de la fraction $\frac{M_1M}{MM_2}$ demeurera de toute évidence inchangée.

Remarque 2. Le nombre λ ne dépend pas du choix de l'unité de mesure. En effet si l'unité de mesure est modifiée, les grandeurs de tous les segments pris sur l'axe u se trouvent multipliées par le même facteur et par conséquent le rapport $\frac{M_1M}{MM_2}$ ne change pas.

Remarque 3. Si la possibilité d'une coïncidence du point M avec le point M_2 n'est pas exclue, l'égalité (1) ne détermine aucun nombre au cas où M et M_2 sont confondus (car $MM_2 = 0$). On dit alors (pour une raison qui sera exposée dans le numéro suivant) que le rapport $\frac{M_1M}{MM_2}$ « est égal à l'infini ».

23. Supposons que le sens positif soit choisi sur la droite M_1M_2 de telle façon que le segment $\overline{M_1M_2}$ soit orienté positivement. M_1M_2 est alors un nombre positif. Si en même temps le point M est situé entre les points M_1 et M_2, les nombres M_1M et MM_2 sont également positifs et, par conséquent, le rapport $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ est un nombre positif. Si le point M se rapproche du point M_1, λ tend vers 0 (et devient nul quand M se confond avec M_1). Si le point M se rapproche indéfiniment du point M_2, λ croît indéfiniment, tend vers l'infini (c'est pourquoi l'on dit que λ devient infini quand M se confond avec M_2).

Admettons à présent que le point M se trouve sur la droite déterminée par les points M_1 et M_2 en dehors du segment $\overline{M_1M_2}$. Dans ce cas un des nombres M_1M et MM_2 est positif et l'autre négatif et M_1M et MM_2 étant des grandeurs de signes contraires. $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ sera un nombre négatif.

24. En géométrie analytique le problème de la division d'un segment dans un rapport donné consiste en ce qui suit.

Considérant comme connues les coordonnées de deux points $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ et le rapport λ dans lequel un point M (inconnu) divise le segment $\overline{M_1M_2}$, déterminer les coordonnées du point M.

La solution de ce problème est fournie par le théorème suivant.

Théorème 6. *Si le point $M(x; y)$ divise le segment $\overline{M_1M_2}$ dans le rapport λ, les coordonnées de ce point s'expriment par les formules*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{2}$$

Démonstration. Projetons les points M_1, M_2, M sur l'axe Ox et désignons leurs projections respectives par P_1, P_2 et P

(fig. 19). En vertu du théorème de géométrie élémentaire indiquant que les segments déterminés sur des droites quelconques par plusieurs parallèles sont proportionnels (théorème de Thalès), nous avons

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda. \tag{3}$$

Conformément au théorème 3 (n° 17),

$$P_1P = x - x_1, \quad PP_2 = x_2 - x.$$

De ces relations et de l'égalité (3) nous déduisons

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$$

En résolvant cette équation par rapport à x, nous trouvons

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Nous avons ainsi obtenu la première des formules (2). La deuxième est obtenue de façon tout à fait analogue par projection sur l'axe Oy et le théorème est prouvé.

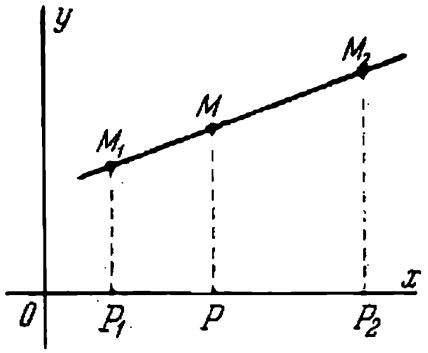


Fig. 19

R e m a r q u e. Si $\lambda = -1$, les formules (2) n'ont plus de sens car le dénominateur de ces formules devient nul ($1 + \lambda = 0$). Mais dans ce cas le problème énoncé n'a pas de solution. En effet, aucun point ne peut diviser le segment $\overline{M_1M_2}$ dans le rapport $\lambda = -1$, car si $\frac{M_1M}{MM_2} = -1$, $M_1M = -MM_2$ et $M_1M + MM_2 = M_1M_2 = 0$, ce qui est impossible, les points M_1 et M_2 étant supposés différents.

25. Notons un cas particulier important du théorème précédent: *si* $M_1(x_1; y_1)$ *et* $M_2(x_2; y_2)$ *sont deux points quelconques et* $M(x; y)$ *le milieu du segment* $\overline{M_1M_2}$,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Ces formules sont obtenues à partir des formules (2), n° 24, pour $\lambda = 1$ *. Nous pouvons donc énoncer que *les coordonnées du milieu d'un segment sont égales à la demi-somme des coordonnées de ses extrémités.*

Exemple 1. Soient les points M_1 (1 ; 1) et M_2 (7 ; 4). Sur la droite qu'ils déterminent trouver un point M deux fois plus rapproché de M_1 que de M_2 et situé entre les points M_1 et M_2.

Solution. Le point cherché partage le segment $\overline{M_1M_2}$ en deux parties dont le rapport est $\lambda = \frac{1}{2}$. En appliquant les formules (2), n° 24, nous trouvons les coordonnées de ce point : $x = 3$, $y = 2$.

Exemple 2. Soient les points M_1 (1 ; 1) et M_2 (7 ; 4). Trouver sur la droite M_1M_2 et en dehors du segment limité par ces points un point M deux fois plus rapproché du point M_1 que du point M_2.

Solution. Le point que nous devons déterminer partage le segment $\overline{M_1M_2}$ suivant le rapport $\lambda = -\frac{1}{2}$. Les formules (2), n° 24, nous donnent les coordonnées de ce point : $x = -5$, $y = -2$.

Exemple 3. Soient les sommets d'un triangle A (5 ; —1), B (—1 ; 7), C (1 ; 2). Déterminer la longueur de la bissectrice intérieure issue du sommet A.

Solution. Désignons par M le point d'intersection de cette bissectrice avec le côté BC, par c et b les longueurs respectives des côtés AB et AC. On sait d'après le cours de géométrie élémentaire que la bissectrice issue d'un des sommets d'un triangle divise le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés adjacents. Par conséquent, le point M partage le segment $\overline{BC}$ suivant un rapport λ, où

$$\lambda = \frac{BM}{MC} = \frac{c}{b}.$$

Utilisant les formules (2), n° 18, nous déterminons à présent les longueurs des côtés AB et AC

$$c = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-7)^2} = 10; \quad b = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-2)^2} = 5.$$

Par conséquent, $\lambda = 2$. En appliquant les formules (2), n° 24, trouvons les coordonnées du point M : $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{11}{3}$.

Appliquant une nouvelle fois les formules (2), n° 18, nous trouvons la longueur de la bissectrice $AM = \frac{14}{3}\sqrt{2}$.

Exemple 4. Des masses m_1, m_2, m_3 sont placées aux points M_1 $(x_1 ; y_1)$, $M_2(x_2 ; y_2)$ et $M_3(x_3 ; y_3)$. Déterminer le centre de gravité de ce système de masses.

Solution. Trouvons tout d'abord le centre de gravité M' $(x' ; y')$ du système de deux masses m_1 et m_2. La mécanique nous indique que le centre de gravité (barycentre) de ce système de deux masses partage le segment $\overline{M_1M_2}$ en parties inversement proportionnelles aux masses m_1, m_2, autrement dit dans le rapport

---

* Si M est le milieu du segment $\overline{M_1M_2}$, $M_1M = MM_2$ et par conséquent $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} = 1$.

$\lambda = \frac{m_2}{m_1}$. D'après les formules (2) du n° 24 nous trouvons

$$x' = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2},$$

$$y' = \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1} y_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Soit $M(x\,;\,y)$ le centre de gravité du système de trois masses m_1, m_2, m_3. La position du point M ne changera pas si les masses m_1 et m_2 sont concentrées au point M'. Autrement dit, le point M est le centre de gravité d'un système de deux masses, c'est-à-dire de la masse m_3 placée au point M_3 et d'une masse $m_1 + m_2$ placée au point M'. Nous pouvons, par conséquent, trouver le point que nous cherchons en tant que point partageant le segment $\overline{M'M_3}$ dans le rapport $\lambda = \frac{m_3}{m_1 + m_2}$. Appliquant les formules (2), n° 24, nous obtenons:

$$x = \frac{x' + \frac{m_3}{m_1 + m_2} x_3}{1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_3}{m_1 + m_2} x_3}{1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$y = \frac{y' + \frac{m_3}{m_1 + m_2} y_3}{1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{\frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_3}{m_1 + m_2} y_3}{1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

R e m a r q u e. Pour un système de masses m_1, m_2, . . ., m_k placées aux points M_1 $(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, . . ., $M_k(x_k;\ y_k)$, les coordonnées du centre de gravité de ce système de masses sont déterminées par les formules suivantes:

$$x = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k},$$

$$y = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots + y_k m_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}.$$

Pour le démontrer il suffit d'appliquer de proche en proche à l'ensemble des points les formules (2), n°24.

§ 8. TRANSFORMATION DES COORDONNÉES CARTÉSIENNES LORS DE LA TRANSLATION PARALLÈLE DES AXES

26. Comme nous le savons déjà, dans les problèmes de géométrie analytique la position des objets géométriques est définie par rapport à un système déterminé de coordonnées. Il peut toutefois devenir nécessaire pour une raison quelconque de remplacer le système de coordonnées envisagé par un nouveau système plus commode. Mais un point quelconque a, en règle générale, des coordonnées différentes

dans les différents systèmes de coordonnées. C'est pourquoi lorsque deux systèmes de coordonnées sont envisagés pour l'examen d'une seule et même question, le besoin se fait sentir de calculer les coordonnées d'un point quelconque dans un système connaissant ses coordonnées dans l'autre système. On se sert dans ce but des formules de transformation des coordonnées qui traduisent les changements intervenus dans le système de coordonnées.

27. Nous établirons tout d'abord les formules de transformation des coordonnées cartésiennes lors de la transla-

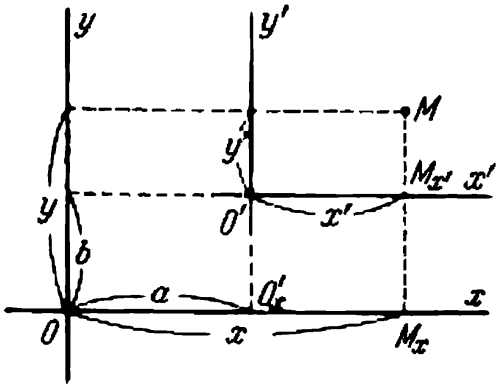


Fig. 20

tion parallèle des axes, autrement dit pour une modification du système cartésien de coordonnées telle que l'origine du système change de position, la direction des axes et l'unité de mesure restant inchangées.

Soient Ox et Oy les anciens axes et $O'x'$ et $O'y'$ les nouveaux axes de coordonnées (fig. 20). *La position des nouveaux axes par rapport aux anciens est déterminée par les anciennes coordonnées de la nouvelle origine*: O' $(a; b)$. Nous appellerons le nombre a grandeur de translation en direction de l'axe Ox, et le nombre b grandeur de translation en direction de l'axe Oy. Les coordonnées d'un point quelconque M du plan se rapportent aux anciens axes $(x; y)$. Les coordonnées de ce même point par rapport aux nouveaux axes seront différentes et s'écriront $(x'; y')$. Notre but est d'établir les formules permettant d'exprimer x, y à l'aide de x', y' (ou x', y' à l'aide de x, y).

Projetons le point O' sur l'axe Ox et le point M sur les axes Ox et $O'x'$.

Désignons la projection du point O' sur l'axe Ox par O'_x, les projections du point M sur les axes Ox et $O'x'$ par M_x et $M_{x'}$. Il est évident que la grandeur du segment O'_xM_x de l'axe Ox est égale à la grandeur du segment $O'M_{x'}$ de l'axe $O'x'$. Or $O'M_{x'} = x'$. Par conséquent, $O'_xM_x = x'$. En outre, $OO'_x = a$, $OM_x = x$. En vertu

de l'identité principale (voir n° 3) $OM_x = OO'_x + O'_xM_x$; d'où, tenant compte des indications précédentes, nous obtenons $x = x' + a$. De façon analogue, nous obtenons par projection sur les axes Oy et $O'y'$ $y = y' + b$.

Ainsi donc,

$$x = x' + a, \quad y = y' + b. \tag{1}$$

Telles sont les formules recherchées. Elles peuvent également être écrites de la façon suivante :

$$x' = x - a, \quad y' = y - b. \tag{1'}$$

Le résultat obtenu peut être formulé de la façon suivante : *lors de la translation parallèle d'un système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'une grandeur a dans le sens de l'axe Ox et d'une grandeur b dans le sens de l'axe Oy les abscisses de tous les points sont diminuées de cette grandeur a et toutes les ordonnées de la grandeur b.*

§ 9. TRANSFORMATION DES COORDONNÉES CARTÉSIENNES LORS DE LA ROTATION DES AXES

28. Nous établissons à présent la formule de transformation des coordonnées cartésiennes orthogonales correspondant à une rotation des axes; cette rotation consiste à faire tourner dans le même sens et d'un même angle les axes d'un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, l'origine et l'unité de mesure restant inchangées.

Soient Ox et Oy les anciens axes et Ox' et Oy' les nouveaux axes de coordonnées (fig. 21). *La position des nouveaux axes par rapport aux anciens est déterminée par l'angle de rotation, permettant de faire coïncider les anciens axes avec les nouveaux.* Nous désignerons cet angle par la lettre α et l'envisagerons comme en trigonométrie (les rotations positives étant déterminées comme au n° 15).

Un point quelconque M du plan a par rapport aux anciens axes des coordonnées $(x; y)$, et possède, normalement, d'autres coordonnées $(x'; y')$ dans le nouveau système, à savoir : $x = OM_x$, $y = OM_y$, $x' = OM_{x'}$, $y' = OM_{y'}$ (voir fig. 21). Notre but est d'établir les formules permettant d'exprimer x', y' à l'aide de x et y ou x, y à l'aide de x', y'.

Désignons par (ρ, θ) les coordonnées polaires du point M, considérant Ox comme axe polaire, et par (ρ, θ') les coordonnées polaires de ce même point M, en prenant Ox' pour axe polaire (dans les deux cas $\rho = |OM|$). Il est évident que $\theta = \theta' + \alpha$. De plus, conformément aux formules (1), n° 15,

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

et de même

$$x' = \rho \cos \theta', \quad y' = \rho \sin \theta'.$$

Par conséquent,

$$x = \rho \cos \theta = \rho \cos (\theta' + \alpha) = \rho (\cos \theta' \cos \alpha - \sin \theta' \sin \alpha) =$$
$$= \rho \cos \theta' \cos \alpha - \rho \sin \theta' \sin \alpha = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,$$
$$y = \rho \sin \theta = \rho \sin (\theta' + \alpha) = \rho (\cos \theta' \sin \alpha + \sin \theta' \cos \alpha) =$$
$$= \rho \cos \theta' \sin \alpha + \rho \sin \theta' \cos \alpha = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

Ainsi donc,

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ce sont précisément les formules recherchées, c'est-à-dire les formules qui permettent, lors de la rotation des axes d'un angle α, d'exprimer les anciennes coordonnées $(x; y)$ d'un point quelconque M à l'aide des nouvelles coordonnées $(x'; y')$ de ce même point.

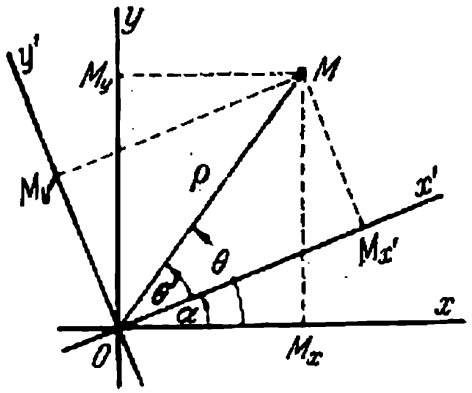


Fig. 21

On peut obtenir les formules permettant d'exprimer les nouvelles coordonnées x', y' du point M à l'aide des anciennes coordonnées x, y à partir des égalités (1) en les considérant comme un système de deux équations à deux inconnues x' et y'. Mais ces formules peuvent également être obtenues directement à l'aide du raisonnement suivant: si le nouveau système est obtenu par rotation de l'ancien système d'un angle α, l'ancien système est obtenu à partir du nouveau système par rotation d'un angle $-\alpha$. On peut donc intervertir dans les égalités (1) les anciennes et nouvelles coordonnées, en remplaçant simultanément α par $-\alpha$, ce qui nous permettra d'obtenir

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

et notre but est atteint.

§ 10. TRANSFORMATION DES COORDONNÉES CARTÉSIENNES LORS DU DÉPLACEMENT DE L'ORIGINE ET DE LA ROTATION DES AXES

29. Nous allons examiner à présent un déplacement des axes qui peut être obtenu par translation suivie d'une rotation (l'unité de mesure restant inchangée).

Désignons par a le déplacement du système en direction de l'axe Ox, par b la grandeur du déplacement suivant l'axe Oy et par α

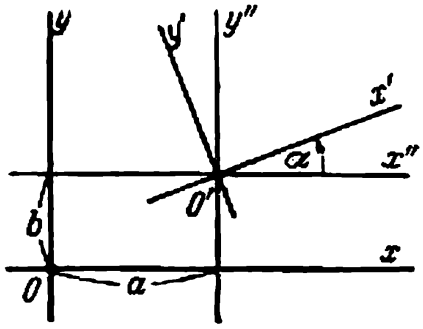


Fig. 22

l'angle de rotation du système. Soient $O'x'$ et $O'y'$ les nouveaux axes. Un point M quelconque du plan a des coordonnées $(x\,;\ y)$ par rapport aux anciens axes. Les coordonnées de ce même point par rapport aux nouveaux axes seront $(x'\,;\ y')$. Le but que nous poursuivons est d'obtenir les formules permettant d'exprimer x', y' à l'aide de x et y et x et y à l'aide de x' et y'.

Pour résoudre ce problème nous introduirons un système auxiliaire de coordonnées, dont l'orientation des axes sera la même que celle des axes de l'ancien système, et dont l'origine se confondra avec l'origine du nouveau système (fig. 22). Nous désignerons les axes du système auxiliaire par $O'x''$ et $O'y''$ et les coordonnées du point M par x'' et y''. Etant donné que le système auxiliaire est obtenu à partir de l'ancien système par translation d'une grandeur a dans le sens Ox et d'une grandeur b dans le sens Oy, nous avons en vertu du n° 27

$$x = x'' + a,$$
$$y = y'' + b.$$

Etant donné, de plus, que le nouveau système est obtenu à partir du système auxiliaire par rotation d'un angle α, nous aurons, conformément au n° 28,

$$x'' = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y'' = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

En substituant ces expressions de x'' et y'' dans les seconds membres des égalités précédentes, nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Considérant en ce cas x' et y' comme inconnues et les déterminant à partir de ce système, nous trouvons

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha, \\ y' &= -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Les deux dernières paires de formules sont justement les formules que nous cherchions.

Les formules (1) expriment les anciennes coordonnées d'un point quelconque à l'aide des nouvelles coordonnées, les formules (2), au contraire, expriment les nouvelles coordonnées à l'aide des anciennes.

Nous formulerons le résultat obtenu sous forme du théorème suivant.

Théorème 7. *Lorsque les axes d'un système de coordonnées cartésiennes orthogonales sont déplacés d'une grandeur a dans la direction de Ox et d'une grandeur b dans la direction de Oy et que de plus, ces axes effectuent une rotation d'un angle* α *(l'unité de mesure restant inchangée), les formules de transformation des coordonnées correspondant à ces modifications du système sont*

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

exprimant les anciennes coordonnées d'un point quelconque du plan à l'aide de ses nouvelles coordonnées x' *et* y'*, ainsi que les formules algébriquement équivalentes*

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha, \\ y' &= -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

exprimant les nouvelles coordonnées à l'aide des anciennes.

Exemple. Etablir les formules de transformation des coordonnées, correspondant à un déplacement de l'origine en O' (2; 3) et à une rotation des axes d'un angle de $+45°$.

Solution. En posant dans les formules (1) $a = 2$, $b = 3$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, nous trouverons les formules suivantes exprimant les anciennes coordonnées à l'aide

des nouvelles:

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}+2,$$

$$y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}+3.$$

Ces formules (ou les formules (2)) nous permettent d'obtenir les nouvelles coordonnées exprimées à l'aide des anciennes:

$$x'=\frac{x+y}{\sqrt{2}}-\frac{5}{\sqrt{2}}, \quad y'=\frac{-x+y}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

R e m a r q u e. On dispose habituellement sur les figures les axes de coordonnées de telle sorte qu'il faille faire tourner le demi-axe positif des abscisses d a n s l e s e n s i n v e r s e d e s a i g u i l l e s d' u n e m o n t r e pour l'appliquer sur le demi-axe positif des ordonnées. Dans ce cas le système de coordonnées est dit système *droit*. On fait parfois usage d'un système d'axes disposés différemment, c'est-à-dire de façon que la rotation minimum nécessaire pour appliquer le demi-axe positif des abscisses sur le demi-axe positif des ordonnées s'effectue d a n s l e s e n s d e s a i g u i l l e s d' u n e m o n t r e. Le système de coordonnées est dit dans ce cas système *gauche*.

Soient deux systèmes de coordonnées (cartésiennes orthogonales). S'ils sont tous deux d r o i t s ou tous deux g a u c h e s, il est possible de faire coïncider les axes de l'un avec les axes de l'autre par translation et rotation. Il découle de ce qui vient d'être dit que lors du passage d'un système à l'autre les coordonnées d'un point quelconque du plan se transforment conformément aux formules (1). Si, par contre, un des systèmes est droit et l'autre gauche, il est impossible de faire coïncider les axes de l'un avec les axes de l'autre par translation et rotation. Autrement dit, si nous appliquons le demi-axe positif des abscisses d'un système (l'ancien) sur le demi-axe des abscisses de l'autre (le nouveau), les demi-axes positifs des ordonnées de ces deux systèmes seront orientés en sens contraires. Par conséquent, dans ce cas la transformation des coordonnées lors du passage d'un des systèmes à l'autre sera définie par des formules que l'on obtiendra à partir des formules (1) en modifiant le signe de la grandeur y'. Nous pouvons donc conclure que les formules générales de transformation des coordonnées cartésiennes orthogonales (l'unité de mesure restant inchangée) peuvent être écrites comme suit:

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha \mp y'\sin\alpha+a,\\ y&=x'\sin\alpha \pm y'\cos\alpha+b,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

où a, b sont les anciennes coordonnées de la nouvelle origine, α l'angle dont il faut tourner l'ancien axe des abscisses pour l'amener sur le nouvel axe. Les signes supérieurs dans les formules (3) correspondent au cas où le passage se fait d'un système d r o i t à un système d r o i t ou d'un système g a u c h e à un système g a u c h e, les signes inférieurs au cas de systèmes de diverses parités. Il faut également tenir compte du fait que si l'ancien système est un système gauche, l'angle α doit être considéré comme positif quand la rotation s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre.

CHAPITRE III

ÉQUATION D'UNE COURBE

§ 11. NOTION D'ÉQUATION D'UNE COURBE. EXEMPLES DE COURBES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS

30. Seules quelques courbes sont examinées en détail en géométrie élémentaire : la droite, le cercle, les lignes brisées. Et pourtant les nécessités de la technique posent devant les sciences mathématiques le problème général d'étudier de nombreuses courbes extrêmement diverses tant par leurs formes que par leurs propriétés. Des méthodes plus parfaites que celles dont dispose la géométrie élémentaire sont nécessaires pour résoudre ce problème de caractère général. Ce sont l'algèbre et l'analyse mathématique qui fournissent de telles méthodes. L'application des méthodes de l'algèbre et de l'analyse repose sur un système unique de définition des courbes : par leurs équations.

31. Soient x et y deux variables quelconques. Cela signifie que l'on entend par le symbole x ainsi que par le symbole y n'importe quels nombres (réels). Les relations du type $F(x, y) = 0$, où $F(x, y)$ représente une expression quelconque contenant x et y, seront appelées par nous équations à deux variables x et y, si $F(x, y) = 0$ n'est pas toujours vraie, c'est-à-dire pas pour tous les couples de nombres x, y. Telles sont, par exemple, les relations $2x + 7y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 25 = 0$, $\sin x + \sin y - 1 = 0$, etc.

Si la relation $F(x, y) = 0$ est vraie pour n'importe quelle valeur numérique de x et y elle est dite *identité*. Telles sont, par exemple, les relations $(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0$, $(x + y)(x - y) - x^2 + y^2 = 0$, etc.

Au cours de notre exposé ultérieur, lorsque nous aurons à examiner des équations à deux variables, nous n'exclurons pas la possibilité suivante : le premier membre de l'équation peut contenir, outre x et y, d'autres symboles comme a, b, c... Mais dans ce cas nous supposerons que ces derniers sont des nombres déterminés (quoique pouvant n'être pas indiqués) et nous les appellerons *paramètres* constants de l'équation. Ainsi, dans l'équation $ax + by + c = 0$, a, b et c sont des paramètres.

32. On dit que deux nombres $x = x_0$, $y = y_0$ satisfont à une équation à deux variables si, en substituant ces deux nombres aux variables de l'équation, on obtient une égalité vraie. Par exemple, $x = 3$ et $y = 4$ satisfont à l'équation $x^2 + y^2 - 25 = 0$, car la substitution

de ces deux nombres aux variables dans le membre gauche de l'équation annule ce membre; par contre, les nombres $x = 1$, $y = 2$ ne satisfont pas à cette équation car leur substitution aux variables donne au premier membre de l'équation une valeur différente de zéro.

33. Examinons une relation quelconque $F(x, y) = 0$. Supposons que x et y ne représentent plus n'importe quels nombres mais seulement des nombres s a t i s f a i s a n t à cette équation. Même cette condition posée, les grandeurs x et y peuvent normalement varier, mais les variations de ces deux grandeurs ne sont déjà plus indépendantes l'une de l'autre: la v a l e u r n u m é r i q u e d e x, u n e f o i s f i x é e, d é t e r m i n e l e s v a l e u r s c o r r e s p o n d a n t e s d e l a g r a n d e u r y. C'est pourquoi l'on dit que l'équation $F(x, y) = 0$ établit entre les variables x et y une r e l a t i o n f o n c t i o n n e l l e.

34. La notion d'é q u a t i o n d'u n e c o u r b e est une notion fondamentale de la géométrie analytique. Nous allons expliquer ce que nous entendons par là.

Soient une courbe du plan et un système de coordonnées quelconque.

Nous appellerons équation de la courbe donnée (dans le système de coordonnées choisi) *l'équation* $F(x, y) = 0$ *à deux variables à laquelle satisfont les coordonnées x et y de tous les points situés sur cette courbe et à laquelle ne satisfait aucune des coordonnées des points non situés sur cette courbe.*

Par conséquent, lorsque l'é q u a t i o n e s t c o n n u e on peut pour chaque point du plan déterminer s'il appartient ou non à la courbe correspondant à cette équation. Il suffit pour cela de substituer les coordonnées du point envisagé aux variables de l'équation: si ces coordonnées s a t i s f o n t à l'équation, le point est situé sur cette courbe, sinon il est situé en dehors de la courbe envisagée.

La définition énoncée constitue la base des méthodes de la géométrie analytique. Ces méthodes consistent à é t u d i e r les courbes envisagées à l'aide de l'a n a l y s e d e s é q u a t i o n s d e c e s c o u r b e s.

35. Dans de nombreux problèmes l'équation de la courbe joue un rôle fondamental, la courbe elle-même étant considérée comme une chose secondaire. En d'autres termes, on pose souvent d'avance une équation déterminée en définissant ainsi une certaine courbe. Cet état de choses est lié à la nécessité de la représentation géométrique des relations fonctionnelles.

Si l'équation est donnée et que nous posons la question de savoir « ce qu'est la courbe qu'elle définit » (ou ce qu'est la courbe dont elle « est l'équation »), il est commode de faire usage de l'expression suivante: *la courbe déterminée par une équation donnée* (dans un

certain système de coordonnées) *est le lieu géométrique de tous les points du plan dont les coordonnées satisfont à cette équation.*

36. Toute courbe, définie par une équation de la forme $y = f(x)$ est appelée représentation *graphique* de la fonction $f(x)$. On peut dire également que la courbe définie par une équation quelconque $F(x, y) = 0$ est la représentation graphique de la relation fonctionnelle entre x et y établie par cette équation.

37. Etant donné que les grandeurs x et y sont considérées comme les coordonnées d'un point variable on les appelle coordonnées

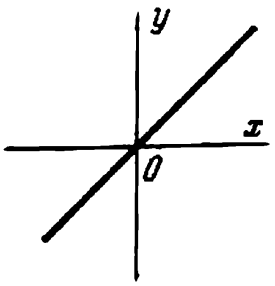


Fig. 23

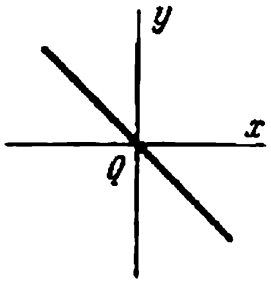


Fig. 24

courantes. Si le système de coordonnées employé n'est pas un système cartésien, il conviendra de désigner les coordonnées courantes par d'autres lettres conformément aux conventions adoptées pour le système donné.

38. Examinons quelques exemples très simples de courbes définies par des équations.

1. Soit l'équation $x - y = 0$. Ecrivons l'équation explicite correspondant à cette équation implicite. Nous aurons $x = y$. Les points dont les coordonnées satisfont à cette équation sont ceux et seulement ceux qui sont situés dans le premier et le troisième quadrant à égales distances des axes de coordonnées. Par conséquent, le lieu géométrique des points dont les coordonnées satisfont à l'équation donnée est la bissectrice des premier et troisième angles de coordonnées ou première bissectrice du plan (fig. 23). C'est la ligne définie par l'équation $x - y = 0$ (c'est également la représentation graphique de la fonction $y = x$).

2. Soit l'équation $x + y = 0$. Donnons-lui la forme $y = -x$. Nous pouvons conclure que seuls les points situés dans le deuxième et le quatrième quadrant et placés à égale distance des axes de coordonnées ont des coordonnées satisfaisant à l'équation donnée. Par conséquent, le lieu géométrique des points dont les coordonnées satisfont à l'équation donnée est la bissectrice des deuxième et quatrième angles de coordonnées ou seconde bissectrice (fig. 24). C'est justement la ligne définie par l'équation $x + y = 0$ (qui est aussi la représentation graphique de la fonction $y = -x$).

3. Soit l'équation $x^2 - y^2 = 0$. Ecrivons-la sous la forme $(x - y)(x + y) = 0$. Nous pouvons conclure que les points dont les coordonnées satisfont à l'équation donnée sont ceux et seulement ceux dont les coordonnées satisfont s o i t à l'équation $x - y = 0$, s o i t à l'équation $x + y = 0$. Par conséquent, la courbe définie par l'équation $x^2 - y^2 = 0$ est composée des points des deux bissectrices des angles de coordonnées (fig. 25).

4. Soit l'équation $x^2 + y^2 = 0$. Etant donné que pour des nombres réels x et y, x^2 et y^2 ne peuvent être de signes différents, ils ne peuvent s'annuler par addition. Par conséquent, si $x^2 + y^2 = 0$,

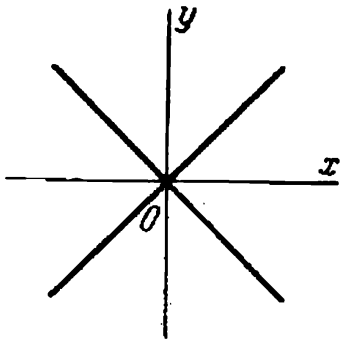


Fig. 25

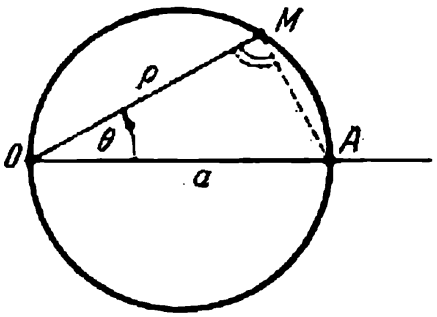


Fig. 26

$x = 0$ et $y = 0$. Il en résulte que les coordonnées du seul point O (0; 0) satisfont à l'équation donnée. En d'autres termes, le lieu géométrique des points dont les coordonnées satisfont à l'équation donnée $x^2 + y^2 = 0$ n'est composé que d'un seul point. En ce cas, l'équation définit une ligne dite d é g é n é r é e.

5. Soit l'équation $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Etant donné que pour tous x et y réels les nombres x^2 et y^2 ne sont pas négatifs, $x^2 + y^2 + 1 > 0$, il n'existe pas un seul point dont les coordonnées puissent satisfaire à l'équation donnée. Cette équation ne définit par conséquent aucune image géométrique sur le plan.

6. L'équation donnée est $\rho = a \cos \theta$ où a est un nombre positif et les variables ρ et θ des coordonnées polaires. Désignons par M un point dont les coordonnées polaires sont $(\rho; \theta)$ et par A un point dont les coordonnées sont $(a; 0)$. Si $\rho = a \cos \theta$, l'angle OMA est droit, et réciproquement. Par conséquent, le lieu géométrique des points dont les coordonnées satisfont à l'équation $\rho = a \cos \theta$ est un cercle de diamètre OA (fig. 26).

7. Soit l'équation $\rho = a\theta$ où a est un nombre positif. Pour se représenter la courbe définie par l'équation donnée, supposons que θ croisse à partir de zéro et suivons le mouvement du point variable M $(\rho; \theta)$, dont les coordonnées sont liées par cette équation. Si $\theta = 0$, alors également $\rho = 0$. Si θ croît à partir de zéro,

ρ croîtra proportionnellement à θ (le nombre a jouant le rôle de coefficient de proportionnalité). Nous voyons que le point variable M (ρ ; θ), issu du pôle du système de coordonnées donné, se déplace autour du pôle dans le sens positif en s'éloignant simultanément de ce pôle. Le point M décrit donc une certaine spirale; la spirale définie par l'équation $\rho = a\theta$ est dite *spirale d'Archimède* (fig. 27).

Si le point M (ρ ; θ), partant d'une position quelconque, se déplace le long d'une spirale d'Archimède et accomplit une

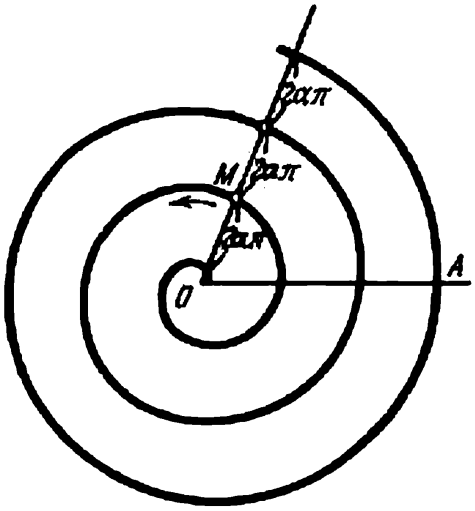


Fig. 27

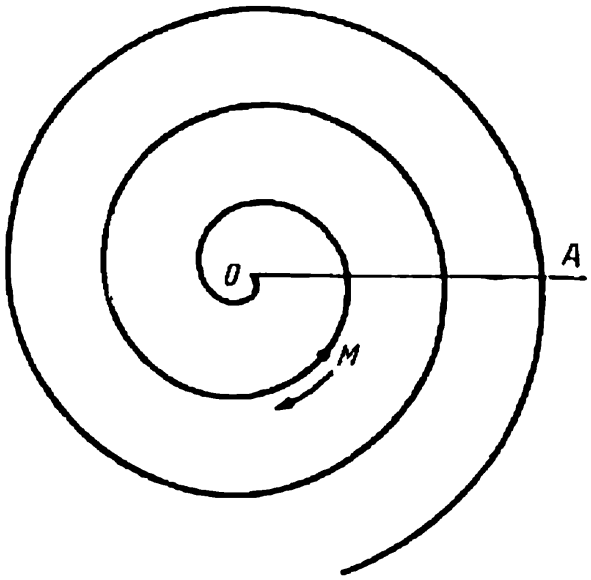


Fig. 28

révolution autour du pôle, l'angle θ se trouve augmenté de 2π et le rayon polaire ρ de $2a\pi$. Il en découle que la spirale d'Archimède coupe chaque rayon polaire en segments égaux (à l'exception du segment touchant le pôle). Tous ces segments ont une longueur constante égale à $2a\pi$.

L'équation $\rho = a\theta$, où a est un nombre négatif, définit une spirale d'Archimède « inverse », dont les points correspondent aux valeurs négatives de θ (fig. 28).

8. Soit l'équation $\rho = \frac{a}{\theta}$ où a est un nombre positif. Etudions la ligne qu'elle définit. Prenons une valeur positive de θ, par exemple $\theta = \frac{\pi}{2}$. Le point de la courbe correspondant à cette valeur sera $M_1\left(\frac{2a}{\pi}; \frac{\pi}{2}\right)$. Si θ croît ensuite indéfiniment, ρ, étant inversement proportionnel à θ, tend vers zéro. Par conséquent, le point variable M (ρ ; θ) se déplace autour du pôle dans le sens posi-

tif en se rapprochant en même temps indéfiniment du pôle (fig. 29). Supposons à présent que θ décroisse en commençant par la valeur $\frac{\pi}{2}$, et tende vers zéro. Dans ce cas $\rho \to \infty$, et le point M $(\rho ; \theta)$ s'éloigne vers l'infini. Pour étudier plus en détail le mouvement du point M, projetons le point M sur l'axe polaire et désignons sa projection par P. Il est évident qu'alors $PM = \rho \sin \theta$ (voir la deuxième

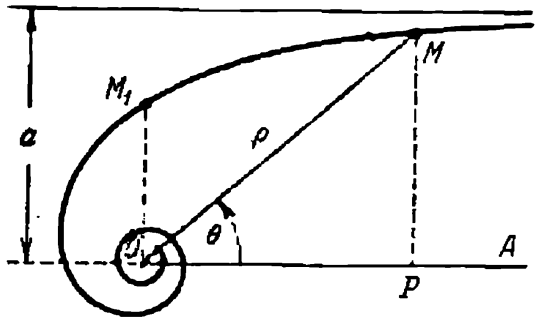


Fig. 29

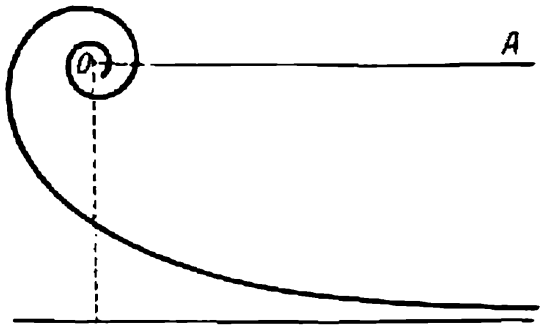


Fig. 30

formule (1), n° 15). En vertu de l'équation donnée, $\rho \sin \theta = a \frac{\sin \theta}{\theta}$. Mais l'analyse mathématique nous indique que $\frac{\sin \theta}{\theta} \to 1$ quand $\theta \to 0$. Par conséquent, lorsque $\theta \to 0$, la grandeur PM tend vers a. On peut en conclure que s'éloignant vers l'infini le point M se rapproche indéfiniment d'une droite parallèle à l'axe polaire et distant de cet axe d'une grandeur a.

Nous voyons que l'équation donnée définit comme les précédentes une spirale dite *hyperbolique*.

L'équation $\rho = \frac{a}{\theta}$, où a est un nombre négatif, définit une spirale hyperbolique « inverse », dont les points correspondent aux valeurs négatives de θ (fig. 30).

9. Soit l'équation $\rho = a^{\theta}$ où a est un nombre positif supérieur à l'unité. Cette équation définit une spirale dite *logarithmique*.

Pour comprendre les particularités de la spirale logarithmique, supposons que $\theta \to +\infty$. Dans ce cas $\rho = a^{\theta} \to +\infty$, et par conséquent, le point mobile M $(\rho ; \theta)$, se déplaçant autour du pôle dans le sens positif, s'éloigne indéfiniment du pôle. Si le point M, partant d'une position quelconque, accomplit une révolution complète autour du pôle dans le sens positif, son angle polaire augmente de 2π, alors que son rayon polaire se trouve multiplié par $a^{2\pi}$ (étant donné que $a^{\theta+2\pi} = a^{\theta} a^{2\pi}$). Ainsi donc, le rayon polaire du point M s'accroît avec chaque révolution autour du pôle, cet accroissement obéissant à une progression géométrique (de raison $a^{2\pi}$).

Supposons à présent que $\theta \to -\infty$. Alors $\rho \to 0$ et le point M, tournant autour du pôle (dans le sens négatif), se rapproche indéfiniment du pôle (fig. 31).

Si a est inférieur à l'unité (tout en étant positif), l'équation $\rho = a^\theta$ définit une spirale logarithmique « inverse » (fig. 32). Dans ce cas, le point M tournant autour du pôle dans le sens positif se rapproche indéfiniment de celui-ci, alors qu'en tournant dans le

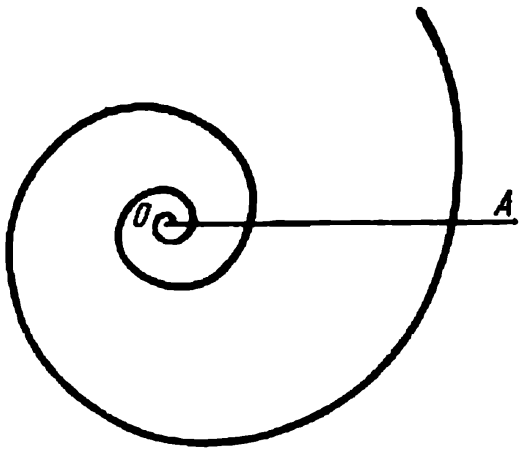


Fig. 31

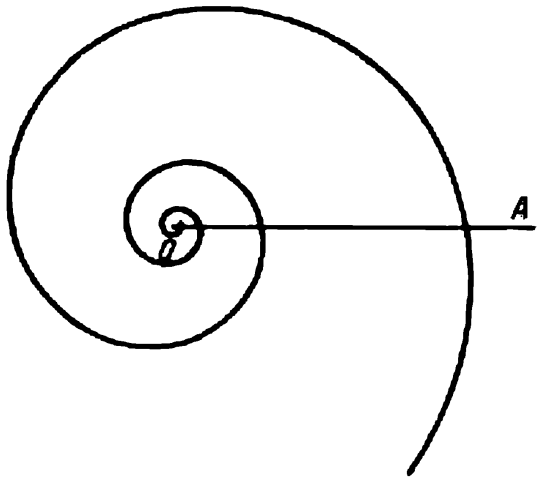


Fig. 32

sens négatif il s'en éloigne indéfiniment (car si $0 < a < 1$ nous aurons $a^\theta \to 0$ pour $\theta \to +\infty$ et $a^\theta \to +\infty$ pour $\theta \to -\infty$).

Si $a = 1$, l'équation $\rho = a^\theta$ définit un cercle, car pour toute valeur de θ nous aurons $\rho = 1$.

Nous venons de citer des exemples d'équations si simples que les courbes qu'elles définissent peuvent être déduites directement. Dans les cas plus complexes une représentation même approximative de la courbe (avec une précision fixée à l'avance) peut devenir extrêmement ardue et exiger l'application de méthodes diverses empruntées à l'analyse mathématique et à la géométrie analytique.

§ 12. EXEMPLES D'ÉTABLISSEMENT D'ÉQUATIONS DE COURBES DONNÉES

39. Nous avons examiné dans le paragraphe précédent quelques exemples de courbes définies à l'aide d'équations données. Nous allons voir à présent des exemples de caractère inverse. Dans chacun d'eux la courbe est définie de façon purement géométrique et c'est l'équation qui doit en être déduite.

Si une courbe est définie comme le lieu géométrique de points soumis à une condition donnée, nous obtiendrons, en exprimant cette

condition à l'aide des coordonnées, une relation entre les coordonnées. Cette relation sera précisément l'équation de la courbe donnée car pour que les coordonnées d'un point satisfassent à cette équation il faut et il suffit que la position du point soit soumise à la condition donnée, autrement dit quand le point appartient à cette courbe.

40. Exemple. Soit un système de coordonnées cartésiennes orthogonales. Etablir l'équation du cercle dont le centre est $C(\alpha ; \beta)$ et dont le rayon est r (fig. 33).

Désignons par M le point variable et par les lettres x et y ses coordonnées (c'est-à-dire les coordonnées courantes). Le cercle donné

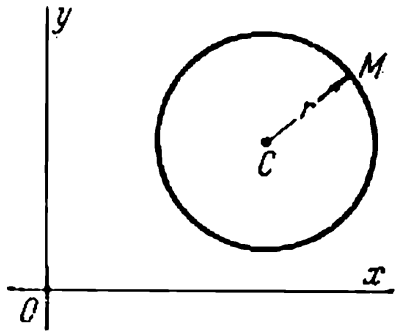


Fig. 33

est le lieu géométrique des points équidistants de C, leur distance de C étant r. Par conséquent, pour que le point M se trouve sur le cercle, il faut et il suffit que

$$CM = r$$

D'après la formule (2), n° 18, nous avons $CM = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$. En substituant à CM * cette expression dans l'égalité (1), nous obtenons :

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = r. \qquad (2)$$

Nous avons trouvé l'équation reliant les grandeurs x et y que satisfont ceux et seulement ceux des points du plan qui sont situés sur le cercle donné. Cette équation est donc l'équation cherchée. Le problème est résolu.

41. Elevant les deux membres de l'équation (2) au carré nous obtiendrons l'équation normale du cercle de centre $C(\alpha, \beta)$ et de rayon r :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = r^2. \qquad (3)$$

* Voir note, p. 12.

Cette équation se rencontre dans de nombreux problèmes de géométrie*. En posant $\alpha = 0$, $\beta = 0$, nous trouvons l'équation du cercle ayant son centre à l'origine des coordonnées :

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{4}$$

42. Etablir l'équation de la trajectoire du point M, qui durant tout son mouvement se trouve deux fois plus près du point A (2 ; 0) que du point B (8 ; 0).

Désignons par x et y les coordonnées du point M (plus précisément les coordonnées courantes). D'après les données du problème, le point M est toujours situé deux fois plus près du point A que du point B. Autrement dit,

$$2AM = BM. \tag{5}$$

En vertu de la formule (2), n° 18,

$$AM = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}, \quad BM = \sqrt{(x-8)^2 + y^2}.$$

D'où nous obtenons, compte tenu de l'égalité (5),

$$2\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-8)^2 + y^2}. \tag{6}$$

Nous avons obtenu une équation reliant les grandeurs x et y. Les coordonnées de n'importe quel point de la trajectoire satisfont à cette équation et les coordonnées de tout autre point du plan n'appartenant pas à cette trajectoire n'y satisfont point. Cette équation est donc celle que nous cherchions. Le problème est résolu. Il est souhaitable de transformer cette équation en lui donnant une forme plus commode. Elevons à cet effet au carré les deux membres de l'équation (6). Nous obtenons l'équation :

$$4[(x-2)^2 + y^2] = (x-8)^2 + y^2,$$

équivalente à l'égalité (6)**. En enlevant les parenthèses, nous trouvons :

$$4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 = x^2 - 16x + 64 + y^2,$$

soit

$$x^2 + y^2 = 16.$$

---

* Lorsqu'on élève les deux membres d'une équation au carré on peut aboutir à une nouvelle équation non équivalente à l'équation d'origine, c'est-à-dire à une équation à laquelle satisfont des valeurs de x et y ne satisfaisant pas à l'équation d'origine. Il n'en est toutefois pas ainsi dans le cas présent, autrement dit l'équation (3) est équivalente à l'équation (2). En effet, en extrayant la racine carrée des deux membres de l'équation (2) nous obtenons $+\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \pm r$. Mais il est indispensable de prendre le signe +, sinon nous aboutirons à une égalité fausse. Par conséquent, l'équation (2) peut être obtenue à partir de l'équation (3) de même que l'équation (3) peut être obtenue à partir de l'équation (2).

** La démonstration est analogue à celle de l'affirmation précédente (n° 41).

Après avoir obtenu l'équation de la trajectoire sous cette forme, nous pouvons facilement nous représenter la trajectoire même. En effet, comparant l'équation obtenue avec l'équation (4), n° 41, nous pouvons conclure que la trajectoire considérée est un cercle de rayon $r = 4$, ayant son centre à l'origine des coordonnées.

43. Exemple. Etablir l'équation d'une droite en coordonnées polaires, considérant comme connus la distance p du pôle à la droite et l'angle θ_0 entre l'axe polaire et la demi-droite issue de l'origine et perpendiculaire à la droite donnée (fig. 34).

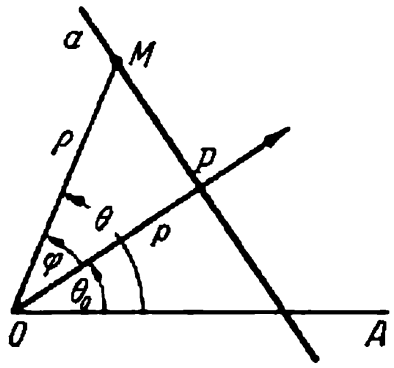


Fig. 34

Solution. Soit a une droite quelconque, P le pied de la perpendiculaire abaissée sur cette droite du pôle O. En accord avec l'énoncé du problème nous considérons connus $OP = p$ et l'angle θ_0 entre l'axe polaire et la demi-droite OP. Prenons sur le plan un point quelconque $M(\rho ; \theta)$. Il est évident que le point M est situé sur la droite a si et seulement si la projection du point M sur la demi-droite OP coïncide avec le point P, autrement dit lorsque $\rho \cos \varphi = p$ où $\varphi = \angle POM$. Remarquant que $\varphi = \theta - \theta_0$ (ou $\varphi = \theta_0 - \theta$), nous trouvons l'équation cherchée de la droite a sous la forme $\rho \cos(\theta - \theta_0) = p$. Les coordonnées courantes sont ici ρ et θ.

§ 13. INTERSECTION DE DEUX COURBES

44. On a souvent à résoudre en géométrie analytique le problème suivant.

Soient les équations de deux courbes:

$$F(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi(x, y) = 0.$$

Trouver leur point d'intersection.

Comme toujours en géométrie analytique, quand nous disons « trouver un point » nous sous-entendons « calculer ses coordonnées ». Le principe de la solution de ce problème découle directement de la définition de l'équation d'une courbe, donnée au n° 34.

En effet, chaque point d'intersection de deux courbes données est un point qui leur est commun. Par conséquent, les coordonnées d'un tel point doivent satisfaire simultanément tant à l'équation $F(x, y) = 0$ qu'à l'équation $\Phi(x, y) = 0$. Nous trouverons tous les points d'intersection des lignes données en résolvant le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} F(x, y) &= 0, \\ \Phi(x, y) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Chaque solution de ce système détermine un des points recherchés. Il va de soi que la réalisation pratique de ce principe peut se heurter à des difficultés de calcul.

Exemple 1. Soient les équations de deux cercles $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ et $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$. Trouver leurs points d'intersection.

Solution. En supprimant les parenthèses et en reportant tous les termes de l'équation dans le premier membre, nous pouvons écrire les équations comme suit:

$$x^2+y^2-2x-6y+6=0, \quad x^2+y^2-6x-10y+30=0. \tag{1}$$

Après avoir soustrait la deuxième équation de la première nous obtenons: $4x + 4y - 24 = 0$, ou bien $y = -x + 6$. En unissant cette équation à la première des équations données, nous aboutissons au système:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2-2x-6y+6&=0, \\ y&=-x+6. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Le système (2) est équivalent au système (1) *. Le problème se réduit donc à la résolution de ce système. En substituant dans la première équation à y sa valeur $-x + 6$, nous trouvons $x^2 + x^2 - 12x + 36 - 2x + 6x - 36 + 6 = 0$, ou encore

$$x^2-4x+3=0.$$

D'où $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3}$, autrement dit $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. D'après les valeurs trouvées pour x, nous trouverons les valeurs de y à partir de l'équation $y = -x + 6$. Pour $x_1 = 1$ nous aurons $y_1 = 5$, pour $x_2 = 3$ nous aurons $y_2 = 3$. Par conséquent, les points cherchés sont les points (1 ; 5) et (3 ; 3).

Exemple 2. Soient les équations de deux courbes $x + y = 0$ (la deuxième bissectrice) et $(x-5)^2 + y^2 = 1$ (un cercle). Trouver leurs points d'intersection.

Solution. Etablissons le système

$$\left.\begin{aligned} (x-5)^2+y^2&=1, \\ x+y&=0. \end{aligned}\right\}$$

Remplaçons dans la première équation y par $-x$ (tiré de la deuxième équation): $(x-5)^2+x^2=1$, soit $x^2-5x+12=0$.
D'où

$$x_{1,2}=\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}-12}=\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{-23}}{2}.$$

Etant donné que $\sqrt{-23}$ est un nombre imaginaire, nous aboutissons à la conclusion que le système ne possède pas de solutions réelles, et que par conséquent les lignes données ne se coupent pas.

* Etant donné que le système (2) est déduit du système (1) et qu'il est facile de déduire (1) de (2).

§ 14. ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES D'UNE COURBE

45. Soit un système déterminé de coordonnées et soient deux fonctions de la même variable t:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Convenons de considérer les grandeurs x et y pour chaque valeur de t comme les coordonnées d'un certain point M. Lorsque t varie, les grandeurs x et y, en général, varient également, et par conséquent, le point M se déplace sur le plan. *Les égalités* (1) *sont dites équations paramétriques de la trajectoire du point* M; *l'argument* t *est appelé paramètre variable.*

Les équations paramétriques jouent un rôle important en mécanique où elles sont utilisées en qualité d'équations dites de *mouvement.* Précisons cette idée en indiquant que si un point matériel se meut dans un plan, il possède à chaque instant t des coordonnées déterminées x et y. Les équations qui expriment x et y en fonction du temps t sont dites équations du mouvement du point M. Elles ont la forme (1).

En mécanique le mouvement d'un point matériel est considéré comme mathématiquement donné si ses équations sont établies.

46. Soit une ligne définie par les équations paramétriques $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ en tant que trajectoire du point $M(x, y)$.

Si $F(x, y) = 0$ découle des équations données, les coordonnées $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ du point M satisfont à cette équation quel que soit t. Le point M se meut donc le long de la courbe $F(x, y) = 0$. Si, de plus, le point M parcourt toute la courbe, $F(x, y) = 0$ est une équation ordinaire de la trajectoire du point M. On dit que $F(x, y) = 0$ est le résultat de *l'élimination du paramètre* entre les équations paramétriques $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$.

Exemple. Les équations

$$x = r\cos t,$$

$$y = r\sin t$$

sont les équations paramétriques d'un cercle de rayon r ayant son centre à l'origine des coordonnées. En effet, élevant ces équations au carré et les additionnant, nous obtiendrons l'équation qui en résulte

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

On voit donc que le point $M(x, y)$ se déplace suivant le cercle indiqué. De plus, étant donné que le paramètre t prend toutes les valeurs possibles, la demi-droite OM (qui forme avec l'axe Ox un angle t) occupe toutes les positions possibles. Par conséquent,

le point M parcourt tout le cercle (lorsque t croît indéfiniment, un nombre infini de fois).

47. Soit $\rho = f(\theta)$ l'équation polaire d'une courbe. Cette même courbe peut être définie en coordonnées cartésiennes à l'aide des équations paramétriques suivantes:

$$x = f(\theta)\cos\theta,$$
$$y = f(\theta)\sin\theta.$$

Pour obtenir ces équations, il suffit de remplacer dans les formules $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ (voir n° 15) ρ par la fonction $f(\theta)$.

Exemple. La spirale d'Archimède, la spirale hyperbolique et la spirale logarithmique ont respectivement en coordonnées polaires $\rho = a\theta$, $\rho = \frac{a}{\theta}$, $\rho = a^{\theta}$ (voir n° 38) d'où on en déduit les équations paramétriques suivantes, en coordonnées cartésiennes:

$$x = a\theta\cos\theta,$$
$$y = a\theta\sin\theta$$

pour la spirale d'Archimède,

$$x = \frac{a\cos\theta}{\theta},$$
$$y = \frac{a\sin\theta}{\theta}$$

pour la spirale hyperbolique,

$$x = a^{\theta}\cos\theta,$$
$$y = a^{\theta}\sin\theta$$

pour la spirale logarithmique.

Dans tous les cas examinés c'est l'angle polaire θ du point variable qui est le paramètre.

§ 15. COURBES ALGÉBRIQUES

48. Les courbes définies en coordonnées cartésiennes orthogonales par des équations algébriques font l'objet d'une étude fondamentale en géométrie analytique.

Ce sont des équations des formes suivantes:

$$Ax + By + C = 0; \quad (1)$$
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; \quad (2)$$
$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + K = 0; \quad (3)$$
. . . . . .

A, B, C, D, E, F, etc., sont ici des constantes appelées coefficients des équations données.

L'équation (1) est dite *équation générale du premier degré* (les valeurs numériques de ses coefficients peuvent être arbitraires, mais à condition que l'équation contienne véritablement des termes du premier degré; autrement dit, la valeur zéro pour A et B simultanément est exclue); l'équation (2) est dite *équation générale du second degré* (les valeurs numériques de ses coefficients peuvent être quelconques à condition que l'équation comprenne vraiment des termes du second degré, c'est-à-dire que le cas où A, B et C sont simultanément nuls soit exclu); l'équation (3) est dite *équation générale du troisième degré* (les valeurs numériques de ses coefficients peuvent être quelconques à condition que les quatre coefficients A, B, C et D ne soient jamais simultanément nuls). Les équations du quatrième, cinquième degré, etc., ont une forme identique.

Citons les équations non algébriques suivantes:

$$y - \sin x = 0,$$
$$y - \log x = 0,$$
$$y - 10^x = 0,$$
$$10^x - 5^y + 1 = 0,$$
$$2^{xy} - x - y = 0.$$

Une courbe définie dans un système de coordonnées cartésiennes orthogonales par une équation algébrique de degré n est dite courbe algébrique d'ordre n.

49. Théorème 8. *Toute courbe définie dans un système de coordonnées cartésiennes orthogonales par une équation de degré n est définie dans tout autre système de telles coordonnées par une équation qui est également algébrique et de même degré n.*

Démonstration. Soit une courbe définie dans un système de coordonnées d'axes Ox et Oy par une équation algébrique de n-ième degré. Lors du passage à un autre système de coordonnées d'axes $O'x'$, $O'y'$ les coordonnées de tous les points se transforment conformément aux formules

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha \mp y' \sin\alpha + a, \\ y &= x' \sin\alpha \pm y' \cos\alpha + b \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

avec un choix déterminé du signe des seconds termes des membres droits (voir remarque en fin du n° 29). Pour obtenir l'équation de la même courbe en nouvelles coordonnées, nous devrons remplacer les anciennes variables de son équation conformément aux formules (4). Le premier membre de cette équation est une somme de monômes qui sont chacun un produit de puissances entières non négatives des variables x et y prises avec un certain coefficient. Après substitution de x et y d'après les formules (4) et après avoir ouvert toutes les parenthèses nous obtenons dans le premier membre de l'équation que nous transformons une somme de nouveaux monômes qui sont chacun un produit de puissances entières non négatives des nouvelles variables x' et y' prises avec un certain coefficient.

Nous voyons par conséquent que le caractère a l g é b r i q u e de l'équation s e c o n s e r v e lors d'une telle transformation.

Nous devons démontrer à présent que le degré reste également inchangé. C'est presque évident. En effet, comme les formules (4) sont du premier degré par rapport à x' et y', après substitution à x et y de nouvelles variables d'après ces formules et après avoir ouvert toutes les parenthèses dans le premier membre de l'équation que nous transformons, nous ne pourrons voir apparaître aucun monôme dont le degré * par rapport aux nouvelles variables x' et y' soit supérieur à n.

Par conséquent, pour toute transformation de caractère indiqué d'une équation algébrique son degré ne peut s'élever. Nous ignorons cependant d'avance si ce degré peut être moindre (les monômes de degré supérieur peuvent en effet s'annuler à la suite de transformations que nous effectuons). Mais si lors du passage d'un système de coordonnées cartésiennes orthogonales à un autre système analogue le degré d'une équation algébrique quelconque baisse, il doit s'élever lors du passage du second au premier, ce qui est impossible comme nous venons de le voir. La démonstration du théorème est donc achevée.

Le théorème que nous venons d'établir prouve que le caractère algébrique de l'équation et le degré de cette équation sont des propriétés qui caractérisent la courbe algébrique elle-même et ne sont pas liées au choix des axes de coordonnées.

La théorie générale des courbes algébriques est un sujet dont traitent des ouvrages spéciaux de géométrie analytique. Nous n'étudierons systématiquement dans le présent ouvrage que les courbes du premier et du second degré.

Les paragraphes suivants permettront d'établir que les courbes du premier degré sont des droites (et seulement des droites).

---

* On appelle degré d'un monôme la somme des exposants des variables qui le composent.

CHAPITRE IV

COURBES DU PREMIER DEGRÉ

§ 16. COEFFICIENT ANGULAIRE

50. Soient un système de coordonnées cartésiennes orthogonales et une droite. Désignons par α l'angle dont il faut tourner l'axe Ox pour l'orienter dans un des deux sens de la droite donnée, en l'affectant du signe plus ou moins suivant qu'il faudra le tourner dans le sens positif ou négatif. *Nous appellerons α l'angle de pente de la droite donnée par rapport à l'axe Ox.*

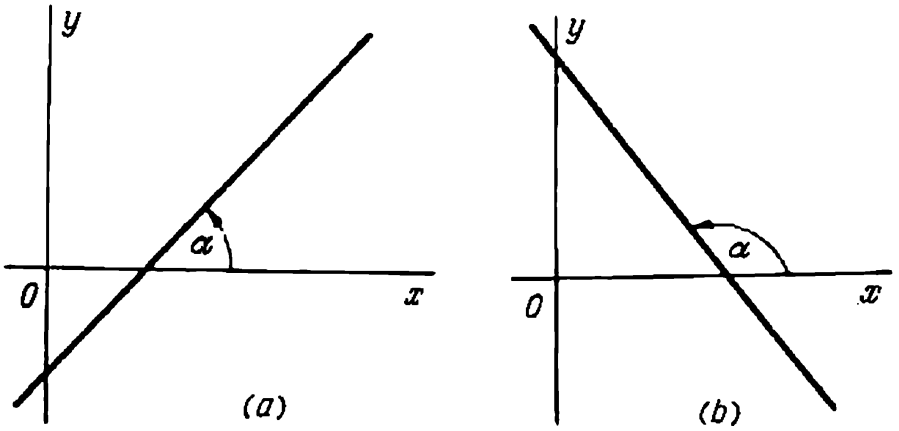


Fig. 35

Si nous avons donné après rotation la même direction à l'axe Ox qu'à la droite donnée nous obtiendrons chaque fois après une rotation supplémentaire de $\pm\pi$, ou $\pm 2\pi$, ou $\pm 3\pi$, etc., un des deux sens de la droite donnée. L'angle α peut donc avoir une multitude de valeurs se distinguant l'une de l'autre de $\pm n\pi$, n étant un nombre entier. *On prend le plus souvent pour angle de pente de la droite par rapport à l'axe Ox la valeur positive minimum de l'angle* α (fig. 35, *a* et *b*). *Dans le cas où la droite est parallèle à l'axe Ox, on considère son angle de pente par rapport à l'axe Ox comme nul.*

Il est important de remarquer que, pour une droite donnée, toutes les valeurs de l'angle de pente par rapport à l'axe Ox ont la même tangente (car $\operatorname{tg}(\alpha \pm n\pi) = \operatorname{tg}\alpha$).

51. *On appelle la tangente de l'angle de pente d'une droite par rapport à l'axe Ox coefficient angulaire de cette droite.*

En désignant le coefficient angulaire par la lettre k nous écrirons symboliquement ce que nous venons d'énoncer comme suit:

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \tag{1}$$

En particulier, si $\alpha = 0$, nous avons également $k = 0$, autrement dit, une droite parallèle à l'axe Ox a un coefficient angulaire nul. Lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $k = \operatorname{tg} \alpha$ n'a plus de sens arithmétique (ne peut s'exprimer par aucun nombre). Autrement dit, toute droite perpendiculaire à l'axe Ox ne possède pas de coefficient angulaire. On dit

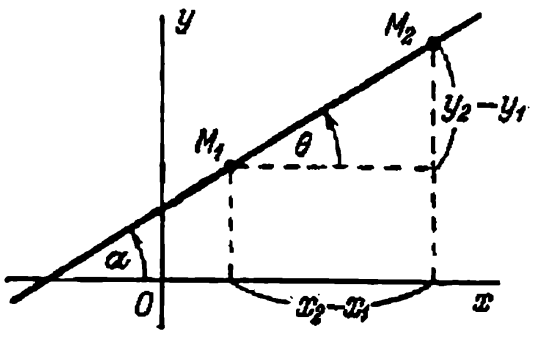


Fig. 36

toutefois très souvent que si une droite est perpendiculaire à l'axe Ox son coefficient angulaire « devient infini », en exprimant ainsi le fait que $k \to \infty$ lorsque $\alpha \to \frac{\pi}{2}$.

Le coefficient angulaire constitue la caractéristique essentielle de la direction d'une droite et est constamment utilisé en géométrie analytique et dans ses applications.

52. Soit une droite quelconque. Limitons-nous à supposer qu'elle n'est pas perpendiculaire à l'axe Ox. Choisissons sur cette droite deux points quelconques $M_1(x_1; y_1)$ et $M_2(x_2; y_2)$. L'angle polaire θ du segment $\overline{M_1M_2}$ est égal à l'angle de pente de la droite considérée par rapport à l'axe Ox et par conséquent, la tangente de l'angle θ est égale au coefficient angulaire de cette droite (fig. 36).

D'où nous trouvons, en nous appuyant en outre sur la formule (6), n° 19:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2}$$

(il est également facile de trouver cette relation en se rapportant à la fig. 36). *La formule* (2) *exprime le coefficient angulaire d'une droite d'après deux de ses points.*

§ 17. ÉQUATION D'UNE DROITE D'APRÈS SON COEFFICIENT ANGULAIRE

53. Soit une droite quelconque; comme précédemment, supposons qu'elle ne soit pas perpendiculaire à l'axe *Ox*. *Déduisons l'équation de la droite donnée, en considérant comme connus son coefficient angulaire k et la grandeur b du segment orienté* $\overline{OB}$ qu'elle découpe sur l'axe *Oy* (voir fig. 37).

Désignons par *M* le point variable, par *x*, *y* ses coordonnées (autrement dit, les coordonnées courantes) et prenons de plus en considération le point *B* (0, *b*) où la droite donnée coupe l'axe *Oy*.

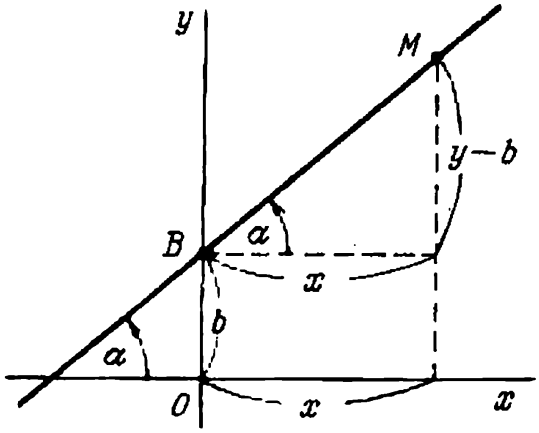


Fig. 37

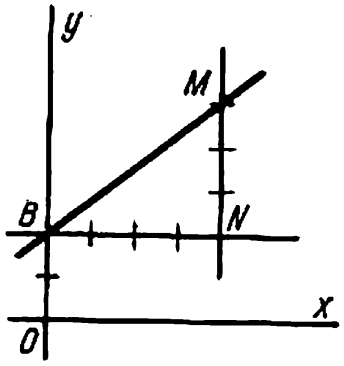


Fig. 38

Calculons le deuxième membre de l'égalité (2), n° 52, en prenant pour point M_1 le point *B* et pour point M_2 le point *M*. Si le point *M* se trouve sur la droite donnée, nous obtiendrons à la fin de notre calcul le coefficient angulaire de notre droite, c'est-à-dire

$$\frac{y-b}{x}=k, \tag{3}$$

et si par contre le point n'est pas situé sur la droite, cette égalité ne sera pas respectée. Par conséquent, l'égalité (3) est l'équation de la droite donnée (qu'il est facile également d'obtenir par examen direct du dessin 37, en tenant compte que $k = \operatorname{tg}\alpha$). Après suppression du dénominateur et en faisant passer *b* dans le second membre de l'équation, nous obtenons

$$y=kx+b. \tag{4}$$

54. Ainsi donc, *toute droite non perpendiculaire à l'axe Ox peut être déterminée par une équation de forme* (4).

Réciproquement, *toute équation de forme* (4) *détermine une droite de coefficient angulaire k et découpe sur l'axe Oy un segment de*

grandeur b. En effet, si l'équation $y = kx + b$ est donnée, il est toujours possible, quels que soient les nombres k et b, de construire une droite possédant le coefficient angulaire k et découpant sur l'axe Oy un segment $\overline{OB}$ de grandeur b donnée; mais alors, comme il a été dit précédemment, la droite construite sera justement déterminée par l'équation donnée. On appelle une équation de forme (4) équation d'une droite avec coefficient angulaire.

Exemple. Construire la droite déterminée par l'équation

$$y = \frac{3}{4}x + 2.$$

Solution. Prenons sur l'axe Oy un segment $OB = 2$ (fig. 38). Par le point B traçons vers la « droite » parallèlement à Ox un segment $BN = 4$, puis par le point N « de bas en haut » parallèlement à l'axe Oy, un segment $NM = 3$. Ceci fait, joignons les points B et M et nous obtiendrons la droite cherchée (elle découpe sur l'axe Oy un segment $b = 2$ et l'angle qu'elle fait avec l'axe Ox a une tangente égale à $^3/_4$).

55. La fonction

$$y = kx + b$$

est dite *linéaire*. En vertu de ce que nous venons d'exposer, nous pouvons énoncer que *la représentation graphique d'une fonction linéaire est une ligne droite.*

Pour $b = 0$ nous avons:

$$y = kx. \tag{5}$$

Les variables x et y liées par une telle relation sont dites *proportionnelles*, le nombre k étant appelé *coefficient de proportionnalité.* Il découle avec évidence de l'exposé précédent que *la représentation graphique de la fonction $y = kx$ est une droite passant par l'origine des coordonnées et dont le coefficient angulaire est k.*

56. Il est souvent nécessaire d'établir l'équation d'une droite connaissant un de ses points $M_1(x_1; y_1)$ et son coefficient angulaire k. L'équation cherchée découle directement de la formule (2), n° 52. En effet, soient M le point variable, x et y ses coordonnées. Si M est situé sur la droite qui passe par le point M_1 et dont le coefficient angulaire est k, il vient, en vertu de la formule (2), n° 52,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = k; \tag{6}$$

si par contre le point M n'est pas situé sur la droite en question, l'égalité (6) n'est pas vérifiée. Par conséquent, l'égalité (6) est précisément l'équation cherchée. On lui donne habituellement l'aspect suivant:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{7}$$

R e m a r q u e. Si nous prenons pour point M_1 $(x_1 ; y_1)$ le point B $(0 ; b)$, l'équation (7) prend la forme (4).

57. En appliquant la relation (7) il est facile de résoudre le problème suivant: é t a b l i r l'é q u a t i o n d e l a d r o i t e p a s s a n t p a r l e s d e u x p o i n t s M_1 $(x_1 ; y_1)$ e t M_2 $(x_2 ; y_2)$.

Appliquant la formule (2), n° 52, nous trouvons le coefficient angulaire de la droite

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

après quoi, en vertu de (7), nous obtenons l'équation cherchée

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

On écrit habituellement cette équation comme suit

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (8)$$

E x e m p l e. Etablir l'équation de la droite passant par les points M_1 (3 ; 1) et M_2 (5 ; 4).

S o l u t i o n. En substituant les nombres donnés aux lettres correspondantes dans (8) nous avons

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y - 1}{3},$$

ou encore $3x - 2y - 7 = 0$.

§ 18. CALCUL DE L'ANGLE DE DEUX DROITES. CONDITIONS DE PARALLÉLISME ET DE PERPENDICULARITÉ DE DEUX DROITES

58. Un des problèmes classiques de la géométrie analytique est le calcul de l'angle formé par deux droites. Nous allons déduire ici une formule permettant de calculer l'angle formé par deux droites dont on connaît les coefficients angulaires (étant entendu qu'aucune d'elles n'est perpendiculaire à l'axe Ox).

Considérons deux droites; appelons l'une d'elles (prise au hasard), la première, l'autre la deuxième (fig. 39). Désignons respectivement par k_1 et k_2 les coefficients angulaires de ces droites, par φ *l'angle de la deuxième droite par rapport à la première, c'est-à-dire l'angle dont il faut faire tourner la première droite pour lui donner la direction de la seconde.* Nous assignerons à φ le signe plus ou moins suivant que la rotation devra s'effectuer dans le sens positif ou négatif. Parlant de l'angle entre deux droites, nous aurons en vue l'angle φ.

Soit α_1 l'angle d'inclinaison de la première droite par rapport à l'axe Ox. En faisant tourner l'axe Ox d'un angle α_1 nous lui donnerons un des sens de la première droite. En le faisant ensuite tourner

encore d'un angle φ, nous lui donnerons un des sens de la deuxième droite. Par conséquent, en ajoutant l'angle φ à l'angle α_1 nous obtenons l'angle d'inclinaison de la deuxième droite par rapport à l'axe Ox. Désignons cet angle par α_2. Conformément à ce qui vient d'être dit, nous avons $\alpha_1 + \varphi = \alpha_2$, soit $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Il vient

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Mais $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$. Par conséquent,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (1)$$

C'est précisément la formule que nous voulions obtenir.

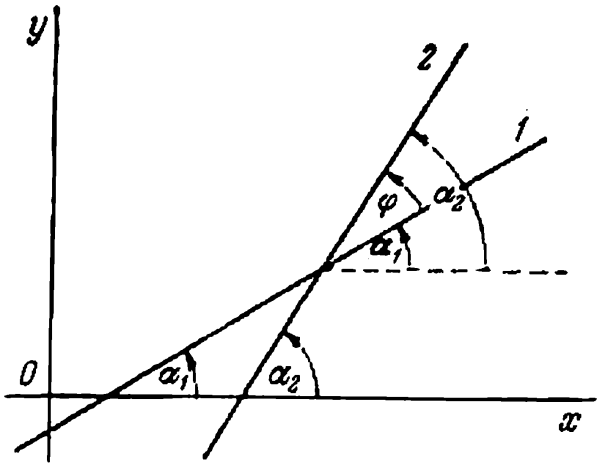


Fig. 39

Au cas où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, la tangente de l'angle perd tout sens arithmétique (« devient infinie »); dans ce cas (et seulement dans ce cas) le dénominateur du second membre de la formule (1) est égal à zéro.

Exemple. Soient deux droites $y = -\frac{1}{7}x + 2$, $y = \frac{3}{4}x + 3$.

Déterminer l'angle formé par ces deux droites.

Solution. En utilisant la formule (1) nous obtenons

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{7}\right)}{1 + \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)} = \frac{21+4}{28-3} = 1.$$

Par conséquent, un des angles formés par les deux droites est un angle de 45°.

59. Lors de la solution de différents problèmes de géométrie analytique il est souvent important de déterminer, connaissant

les équations de deux droites, si elles sont parallèles ou perpendiculaires.

Cette question se résout très simplement.

Soient k_1 et k_2 les coefficients angulaires de deux droites. Désignons par α_1 et α_2 les angles que ces droites forment avec l'axe Ox. Il est évident que ces droites ne seront parallèles entre elles que si leurs inclinaisons respectives sur l'axe Ox sont égales, autrement dit lorsque $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$. Mais $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$ et $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$. Nous en déduisons que *deux droites sont parallèles si et seulement si leurs coefficients angulaires sont égaux*:

$$k_2 = k_1.$$

Les deux droites sont perpendiculaires si et seulement si l'angle φ qu'elles forment est égal à $\frac{\pi}{2}$, autrement dit lorsque $\operatorname{tg}\varphi$ n'a pas de sens arithmétique; dans ce cas, le dénominateur du membre droit de la formule (1) devient nul et nous avons $1 + k_1k_2 = 0$. Par conséquent, *deux droites sont perpendiculaires si et seulement si la relation*

$$k_1k_2 = -1$$

est vraie.

On écrit habituellement cette dernière relation comme suit:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \tag{2}$$

et l'on énonce la condition de perpendicularité de deux droites de la façon suivante: *les coefficients angulaires de deux droites perpendiculaires sont inverses en valeur absolue et de signes contraires.*

Utilisant les critères que nous venons de déterminer, il devient possible d'établir immédiatement que, par exemple, les droites $y = \frac{2}{3}x + 1$, $y = \frac{2}{3}x + 5$ sont parallèles, et que les droites $y = \frac{3}{4}x + 2$, $y = -\frac{4}{3}x + 3$ sont perpendiculaires entre elles.

E x e m p l e. Déterminer la projection du point P (4 ; 9) sur la droite passant par les points $A(3 ; 1)$ et $B(5 ; 2)$.

S o l u t i o n. Nous trouverons le point cherché en résolvant le système formé par les équations de la droite AB et de la perpendiculaire abaissée du point P sur la droite AB.

Etablissons tout d'abord l'équation de la droite AB. En vertu de la relation (8) du n° 57, on aura

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1},$$

soit

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Pour établir l'équation de la perpendiculaire abaissée du point P sur la droite AB, écrivons tout d'abord l'équation d'une droite quelconque pas-

sant par le point P. En vertu de la relation (7), n° 56, nous avons :

$$y-9=k(x-4), \qquad (*)$$

où k est un coefficient angulaire encore indéterminé. La droite que nous cherchons doit être perpendiculaire à AB. Son coefficient angulaire doit par conséquent satisfaire à la condition de perpendicularité avec la droite AB. Etant donné que le coefficient angulaire de la droite AB est égal à $\frac{1}{2}$, nous trouvons en vertu de la formule (2) $k=-2$. En remplaçant k par -2 dans l'équation (*), nous obtenons :

$$y-9=-2(x-4) \text{ ou } y=-2x+17.$$

En résolvant le système

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}, \\ y&=-2x+17, \end{aligned}\right\}$$

nous trouvons les coordonnées de la projection cherchée

$$x=7,\ y=3.$$

§ 19. LA DROITE EN TANT QUE COURBE DU PREMIER DEGRÉ. ÉQUATION GÉNÉRALE DE LA DROITE

60. Nous allons démontrer ici un théorème ayant une importance fondamentale.

Théorème 9. *Dans un système de coordonnées cartésiennes toute droite est déterminée par une équation du premier degré, et réciproquement toute équation du premier degré détermine une droite.*

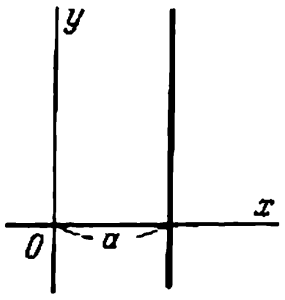


Fig. 40

Démonstration. Prouvons tout d'abord la première partie du théorème. Soit une droite quelconque. Si cette droite n'est pas perpendiculaire à l'axe Ox, en vertu du n° 53 elle est déterminée par une équation de la forme $y=kx+b$, autrement dit par une équation du premier degré.

Si la droite est perpendiculaire à l'axe Ox, les abscisses de tous ses points sont égales à la grandeur du segment déterminé par l'intersection de la droite avec l'axe Ox (fig. 40). Par conséquent, si nous désignons par a la grandeur de ce segment, nous obtenons l'équa-

tion de la droite sous la forme $x = a$, ce qui est également une équation du premier degré.

Ainsi donc, dans un système de coordonnées cartésiennes toute droite est déterminée par une équation du premier degré, ce qui démontre la première partie du théorème.

Démontrons à présent la réciproque. Soit une équation du premier degré

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

les valeurs numériques de A, B et C étant quelconques.

Si $B \neq 0$, on peut écrire cette équation sous la forme suivante

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

En désignant $-\frac{A}{B}$ par k, $-\frac{C}{B}$ par b, nous aurons $y = kx + b$. Or, en vertu du n° 53, cette équation détermine une droite de coefficient angulaire k dont l'intersection avec l'axe Oy détermine un segment de grandeur b.

Si $B = 0$, nous avons $A \neq 0$ et l'on pourra mettre l'équation (1) sous la forme

$$x = -\frac{C}{A}.$$

En désignant $-\frac{C}{A}$ par a nous avons $x = a$, qui est l'équation d'une droite perpendiculaire à l'axe Ox. Nous voyons donc que toute équation du premier degré détermine une droite, ce qui achève la démonstration de notre théorème.

Les courbes déterminées par une équation du premier degré dans un système de coordonnées cartésiennes sont appelées, comme nous le savons, courbes du premier degré (v. n° 48). Usant de cette terminologie, nous pouvons exprimer le résultat que nous venons d'établir comme suit : *toute droite est une courbe du premier degré* ; *toute courbe du premier degré est une droite.*

61. Une équation de la forme $Ax + By + C = 0$ est appelée *équation générale de la droite* (en tant qu'équation générale du premier degré). Les différentes valeurs numériques de A, B, C permettent à cette équation de déterminer toutes les droites sans exception.

§ 20. ÉQUATION INCOMPLÈTE DU PREMIER DEGRÉ. ÉQUATION DE LA DROITE EN FONCTION DES COORDONNÉES À L'ORIGINE

62. Examinons trois cas particuliers où l'équation du premier degré est incomplète.

1) $C = 0$; *l'équation prend la forme* $Ax + By = 0$ *et détermine une droite passant par l'origine des coordonnées.*

En effet, les nombres $x = 0$ et $y = 0$ satisfont à l'équation $Ax + By = 0$. Par conséquent, l'origine des coordonnées appartient à la droite.

2) $B = 0$ $(A \neq 0)$; *l'équation prend la forme* $Ax + C = 0$ *et détermine une droite parallèle à l'axe Oy.*

Nous avons déjà examiné ce cas pendant la démonstration du théorème 9, n° 60. Nous avons montré alors que l'équation $Ax + C = 0$ se réduit à la forme

$$x = a,$$

où $a = -\frac{C}{A}$. Une telle équation détermine une droite perpendiculaire à l'axe Ox car, conformément à cette équation, tous les points de la droite ont des abscisses égales ($x = a$) et sont par conséquent

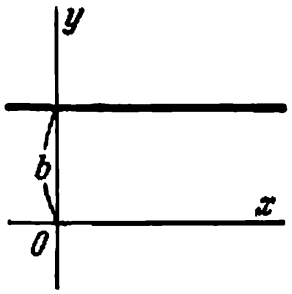


Fig. 41

équidistants de l'axe Oy (« à droite » de l'origine des coordonnées si a est positif, « à gauche » si a est négatif); a est la grandeur du segment de l'axe Ox déterminé par la droite (en comptant à partir de l'origine des coordonnées; voir fig. 40).

En particulier, si $a = 0$, la droite se confond avec l'axe Oy. Par conséquent, l'équation

$$x = 0$$

détermine l'axe des ordonnées.

3) $A = 0$ $(B \neq 0)$; *l'équation prend la forme* $By + C = 0$ *et détermine une droite parallèle à l'axe Ox.*

Cela s'établit comme dans le cas précédent. Bornons-nous à constater que si nous posons $-\frac{C}{B} = b$, l'équation $By + C = 0$ prend la forme

$$y = b;$$

le nombre b est le « niveau de position » commun à tous les points de la droite (fig. 41) et en même temps la grandeur du segment déterminé par la droite sur l'axe Oy (en comptant à partir de l'origine des coordonnées).

En particulier, si $b = 0$, la droite est confondue avec l'axe Ox. Par conséquent, *l'équation*

$$y = 0$$

détermine l'axe des abscisses.

63. Soit à présent l'équation

$$Ax + By + C = 0$$

où aucun des coefficients A, B, C n'est nul. Cette équation peut être ramenée à une certaine forme spéciale, qui présente des commodités pour la solution de certains problèmes de géométrie analytique.

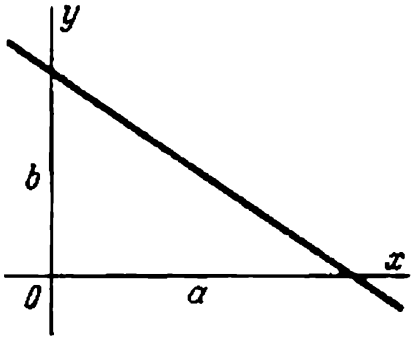


Fig. 42

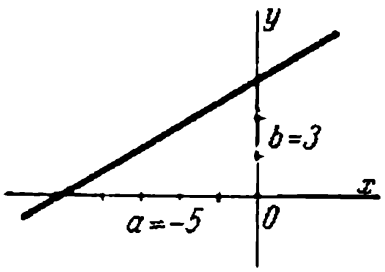


Fig. 43

Reportons le terme constant C dans le deuxième membre de l'équation ; il vient

$$Ax + By = -C.$$

Divisons ensuite les deux parties de l'équation par $-C$. Nous avons

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$$

ou encore

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

En posant

$$a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B},$$

nous obtenons

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{1}$$

C'est là précisément la forme spéciale d'équation que nous voulions obtenir.

Ce qui est essentiel c'est que a et b ont un sens géométrique très simple, a et b sont les coordonnées de la droite à l'origine (fig. 42).

Pour s'en convaincre, trouvons les points d'intersection de la droite avec les axes de coordonnées. Le point d'intersection de la droite avec l'axe Ox se trouve en résolvant le système formé par les équations de la droite donnée et de l'axe Ox

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=1 \\ y&=0. \end{aligned}\right\}$$

D'où $x = a$, $y = 0$. Nous voyons donc que la grandeur du segment déterminé sur l'axe Ox par l'intersection avec la droite est bien égale à a. On établit d'une manière analogue que la grandeur du segment déterminé par la droite sur l'axe Oy est égale à b.

Habituellement on appelle une équation de forme (1) équation d'une droite en fonction des coordonnées à l'origine. Il est commode d'user de cette forme, notamment pour la représentation graphique de la droite.

Exemple. Soit la droite

$$3x-5y+15=0.$$

Trouver l'équation de cette droite en fonction des coordonnées à l'origine et construire cette droite.

Solution. Pour la droite donnée l'équation en fonction des coordonnées à l'origine est

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1.$$

Nous obtiendrons cette droite sur le graphique en prenant sur les axes de coordonnées Ox et Oy des segments dont la grandeur sera respectivement $a = -5$ et $b = 3$ et en joignant les extrémités de ces segments (fig. 43).

§ 21. DISCUSSION DU SYSTÈME FORMÉ PAR LES ÉQUATIONS DE DEUX DROITES

64. Soit un système de deux équations du premier degré :

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1&=0, \\ A_2x+B_2y+C_2&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Chacune des équations (1) détermine une droite. Chaque solution du système détermine un point commun à ces droites.

Nous ferons la discussion du système (1) en donnant aux résultats obtenus une interprétation géométrique.

Supposons que $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Dans ce cas le déterminant du système est différent de zéro :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Le système ne possède donc qu'une seule solution *. Par suite les droites déterminées par les équations du système ne se coupent qu'en un seul point; il en découle que *ces droites sont distinctes et non parallèles.* On trouve les coordonnées du point d'intersection à partir des équations (1) à l'aide des formules:

$$x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

ou encore

$$x = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Supposons à présent que $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Nous avons alors deux cas possibles:

$$\text{soit que } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \text{ soit que } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Voyons d'abord le premier cas. Désignons chacun des rapports égaux $\frac{A_1}{A_2}$ et $\frac{B_1}{B_2}$ par la lettre q; nous aurons alors $A_1 = A_2q$, $B_1 = B_2q$, $C_1 \neq C_2q$. Multiplions la deuxième des équations (1) par q et retranchons la relation ainsi obtenue de la première équation; nous obtenons $C_1 - C_2q = 0$. Cette relation est en contradiction avec la relation déjà établie $C_1 \neq C_2q$. Or, elle résulte du système (1); par conséquent, les équations du système (1) ne peuvent pour aucune valeur numérique de x et y être simultanément des égalités vraies, autrement dit le système (1) ne possède pas de solution. *Les équations* (1) *déterminent des droites n'ayant pas de point commun, c'est-à-dire des droites parallèles.*

Voyons à présent la deuxième possibilité:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Considérant chacun de ces rapports comme égal à q, nous trouvons $A_1 = A_2q$, $B_1 = B_2q$, $C_1 = C_2q$. Par conséquent, en multipliant le premier membre de la deuxième équation par un certain nombre q nous obtiendrons le premier membre de la première équation. Les deux équations sont donc équivalentes. Par conséquent, *les deux équations* (1) *déterminent une seule et même droite.*

* Voir Appendice, n° 2.

Exemples: 1) Les droites

$$3x+4y-1=0,$$
$$2x+3y-1=0$$

se coupent car $\frac{3}{2}\neq\frac{4}{3}$. Les coordonnées du point d'intersection sont $x=-1$, $y=+1$.

2) Les droites

$$2x+3y+1=0,$$
$$4x+6y+3=0$$

sont parallèles, car $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}\neq\frac{1}{3}$. (Le système d'équations donné est, de toute évidence, un système d'équations incompatibles, car en multipliant la première par 2 et en retranchant de la deuxième nous obtenons une égalité contradictoire $1=0$.)

3) Les droites

$$x+y+1=0,$$
$$2x+2y+2=0$$

se confondent car les équations sont équivalentes.

Remarque: *On appelle la relation* $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ *condition de parallélisme des deux droites*

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{et} \quad A_2x+B_2y+C_2=0$$

bien que, comme nous l'avons vu, ces conditions étant remplies, les droites puissent être soit parallèles, soit confondues. Il convient donc, en énonçant que la relation $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ est la condition de parallélisme de deux droites, d'indiquer de plus que le cas où les droites sont confondues sera considéré comme un cas particulier (limite) de parallélisme.

65. Nous déduisons directement de ce qui vient d'être exposé un corollaire que nous utiliserons par la suite.

Deux équations

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{et} \quad A_2x+B_2y+C_2=0$$

déterminent une seule et même droite si et seulement si leurs coefficients sont proportionnels, c'est-à-dire si

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Cette proposition sera utilisée par la suite.

§ 22. ÉQUATION NORMALE DE LA DROITE. CALCUL DE LA DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

66. Nous allons examiner à présent un procédé spécial de notation de l'équation de la droite, appelé équation normale de la droite.

Soit une droite quelconque. Traçons une droite n passant par l'origine des coordonnées et perpendiculaire à la droite donnée. Nous appellerons cette droite n *normale* et nous désignerons par la lettre P son point d'intersection avec la droite donnée (fig. 44).

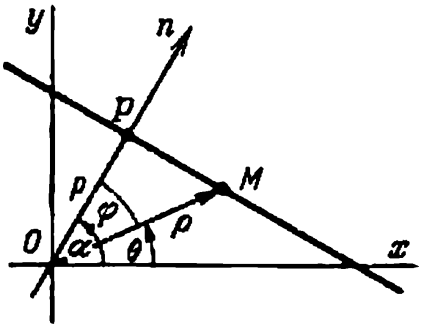


Fig. 44

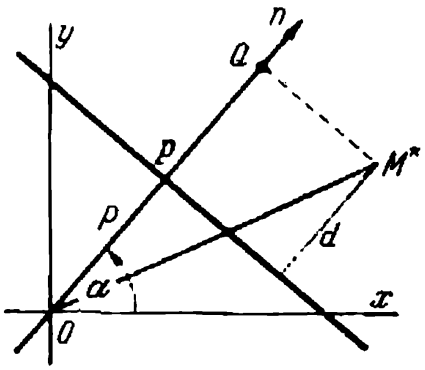


Fig. 45

Prenons pour sens positif de la normale la direction de O vers P (si le point P est confondu avec le point O, autrement dit si la droite donnée passe par l'origine des coordonnées, nous choisirons ce sens arbitrairement). Ainsi donc, la normale est un axe.

Désignons par α l'angle entre l'axe Ox et la normale orientée, et par p la longueur du segment $\overline{OP}$.

Nous considérons l'angle α comme en trigonométrie et nous l'appellerons angle polaire de la normale.

Nous allons déduire à présent l'équation de la droite donnée en considérant les nombres α et p comme connus. Nous choisirons à cet effet sur la droite donnée un point quelconque M dont nous désignerons les coordonnées par x et y. Il est évident que la projection du segment $\overline{OM}$ sur la normale est égale à $\overline{OP}$. Comme le sens positif de la normale coïncide avec l'orientation du segment $\overline{OP}$, la grandeur de ce segment s'exprime par un nombre positif, plus précisément par p:

$$\mathrm{Proj}_n \overline{OM} = p. \tag{1}$$

Exprimons à présent la projection du segment $\overline{OM}$ sur la normale à l'aide des coordonnées du point M. A cet effet, nous désignerons par φ l'angle d'inclinaison du segment $\overline{OM}$ par rapport à la normale,

par ρ, θ les coordonnées polaires du point M. En vertu du n° 20 nous avons:

$\text{Proj}_n \overrightarrow{OM} = \rho \cos \varphi = \rho \cos (\alpha - \theta) = \rho (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) = (\rho \cos \theta) \cos \alpha + (\rho \sin \theta) \sin \alpha = x \cos \alpha + y \sin \alpha$. Par conséquent,

$$\text{Proj}_n \overrightarrow{OM} = x \cos \alpha + y \sin \alpha. \quad (2)$$

Il découle des égalités (1) et (2) que $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ou encore

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \quad (3)$$

C'est précisément l'équation de la droite donnée (à laquelle satisfont, comme nous voyons, les coordonnées x, y de chaque point M appartenant à la droite donnée; si par contre un point M n'appartient pas à la droite donnée ses coordonnées ne satisfont pas à l'équation (3), car dans ce cas $\text{Proj}_n \overrightarrow{OM} \neq p$).

L'équation de la droite de forme (3) *est dite normale. Dans cette équation* α *désigne l'angle polaire de la normale,* p *la distance de l'origine des coordonnées à la droite.*

67. Soit une droite quelconque. Construisons sa normale n (en choisissant le sens positif comme indiqué au n° 66). Soit, de plus, M^* un point quelconque du plan et d sa distance à la droite donnée (fig. 45).

Nous convenons d'appeler *écart* du point M^* de la droite donnée le nombre $+d$ si M^* est situé du côté de la droite qui se trouve dans le sens positif de la normale et $-d$ si M^* se trouve de l'autre côté de la droite donnée. Nous désignerons l'écart du point par rapport à la droite par δ; par conséquent, $\delta = \pm d$. Il est utile de remarquer que $\delta = +d$ lorsque l'origine des coordonnées et le point M^* sont situés de part et d'autre de la droite et que $\delta = -d$ lorsque l'origine des coordonnées et le point M^* se trouvent du même côté de la droite (pour les points appartenant à la droite $\delta = 0$).

Un des problèmes classiques de la géométrie analytique est le calcul de l'écart d'un point par rapport à une droite. Ce problème est résolu grâce au théorème suivant.

Théorème 10. *Si les coordonnées d'un point* M^* *sont* x^* *et* y^* *et si la droite est déterminée par l'équation normale*

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

l'écart de ce point M^* *par rapport à la droite indiquée est fourni par la formule*

$$\delta = x^* \cos \alpha + y^* \sin \alpha - p. \quad (4)$$

Démonstration. Projetons le point M^* sur la normale; soit Q sa projection (fig. 45). Nous avons:

$$\delta = PQ = OQ - OP,$$

où PQ, OQ et OP sont les grandeurs des segments orientés $\overline{PQ}$, $\overline{OQ}$ et $\overline{OP}$, disposés sur la normale. Mais $OQ = \text{Proj}_n \overline{OM^*}$, $OP = p$; par conséquent,

$$\delta = \text{Proj}_n \overline{OM^*} - p. \tag{5}$$

En vertu de la formule (2), n° 66, appliquée au point M^*, nous avons:

$$\text{Proj}_n \overline{OM^*} = x^* \cos\alpha + y^* \sin\alpha. \tag{6}$$

Des égalités (5) et (6) nous déduisons:

$$\delta = x^* \cos\alpha + y^* \sin\alpha - p.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons à présent que $x^* \cos\alpha + y^* \sin\alpha - p$ n'est rien d'autre que le premier membre de l'équation normale de la droite donnée où les coordonnées variables sont remplacées par les coordonnées du point M^*. Nous obtenons donc la règle suivante.

Pour trouver l'écart d'un point quelconque M^* par rapport à une droite, il suffit de remplacer dans le premier membre de l'équation normale de cette droite les coordonnées variables par les coordonnées du point M^*. Le nombre obtenu sera égal à l'écart.

R e m a r q u e. La distance d'un point à une droite est égale au module (à la valeur absolue) de l'écart de ce point: $d = |\delta|$. Par conséquent, pour calculer la distance d'un point à une droite il suffit de calculer l'écart en appliquant la règle que nous venons d'indiquer et de prendre ensuite le module de cet écart.

68. Nous venons de voir que le problème qui consiste à calculer l'écart d'un point par rapport à une droite se résout facilement si la droite est déterminée par une équation n o r m a l e. Montrons maintenant comment réduire l'équation générale à la forme normale. Soit

$$Ax + By + C = 0 \tag{7}$$

l'équation générale d'une droite quelconque, et

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \tag{3}$$

son équation normale.

Etant donné que les équations (7) et (3) déterminent une seule et même droite, en vertu du n° 65 les coefficients de ces droites sont proportionnels. Cela signifie qu'en multipliant tous les termes de l'équation (7) par un certain facteur μ nous obtiendrons l'équation

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0,$$

qui coïncide avec l'équation (3), autrement dit nous aurons:

$$\mu A = \cos\alpha, \quad \mu B = \sin\alpha, \quad \mu C = -p. \tag{8}$$

Pour trouver le facteur μ, élevons au carré les deux premières égalités. Leur somme sera

$$\mu^2 (A^2 + B^2) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

D'où il vient

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{9}$$

Le nombre μ qui permet de donner la forme normale à l'équation générale par multiplication est appelé *facteur normalisant* de cette équation. Le facteur normalisant est déterminé par la formule (9) à son signe près.

Pour déterminer le signe du facteur normalisant appliquons la troisième égalité (8). Conformément à cette égalité, μC est un nombre négatif. Par conséquent, *le signe du facteur normalisant est contraire au signe du terme constant de l'équation normalisée.*

Remarque. Si $C = 0$, le signe du facteur normalisant peut être choisi arbitrairement.

Exemple. Soient la droite $3x - 4y + 10 = 0$ et le point M (4 ; 3). Trouver l'écart du point M par rapport à la droite donnée.

Solution. Pour appliquer la règle donnée au n°67, il faut avant tout réduire l'équation donnée à la forme normale.

Trouvons à cet effet le facteur normalisant

$$\mu = \frac{-1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}.$$

En multipliant l'équation donnée par μ nous obtiendrons l'équation normale cherchée

$$-\frac{1}{5}(3x - 4y + 10) = 0.$$

En remplaçant dans le premier membre de l'équation les variables par les coordonnées du point M, nous avons

$$\delta = -\frac{1}{5}(3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 10) = -2.$$

Donc, le point M a un écart négatif par rapport à la droite donnée et sa distance à la droite est $d = 2$.

§ 23. ÉQUATION D'UN FAISCEAU DE DROITES

69. L'ensemble de toutes les droites d'un plan passant par un point quelconque S $(x_0 ; y_0)$ est appelé *faisceau* de droites de centre S. Il est souvent nécessaire en géométrie analytique de trouver l'équation d'une droite du faisceau connaissant les équations de deux des droites appartenant à ce faisceau, à condition que l'orientation de cette droite soit décrite d'une façon ou d'une autre. On peut résoudre les problèmes de ce genre en utilisant par exemple l'équa-

tion (7), n° 56 : $y - y_1 = k(x - x_1)$ où il convient de prendre pour x_1, y_1 les coordonnées x_0, y_0 du centre du faisceau (le coefficient angulaire k est déterminé suivant la façon dont est donnée l'orientation de la droite cherchée). Il est cependant nécessaire pour cela de calculer au préalable les coordonnées x_0, y_0 du centre du faisceau.

L'énoncé suivant permet d'éviter le calcul des coordonnées x_0, y_0.

Si $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *sont les équations de deux droites dont le point d'intersection est* S, α *et* β *deux nombres quelconques, non nuls simultanément, alors*

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \qquad (1)$$

sera l'équation de la droite passant par le point S.

Démonstration. Etablissons tout d'abord que la relation (1) est bien une équation. A cet effet transcrivons-la comme suit

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2) = 0 \qquad (2)$$

et prouvons que les grandeurs $\alpha A_1 + \beta A_2$ et $\alpha B_1 + \beta B_2$ ne peuvent être nulles simultanément. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $\alpha A_1 + \beta A_2 = 0$ et $\alpha B_1 + \beta B_2 = 0$; mais alors $\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$. Comme les nombres α et β ne sont pas simultanément nuls, le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ ne peut pas être indéterminé; c'est pourquoi la proportion suivante $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ découle des égalités précédentes. Toutefois les coefficients A_1, B_1 ne peuvent pas être proportionnels aux coefficients A_2, B_2 étant donné que les droites indiquées se coupent (v. n° 64). Par conséquent, ce que nous avons supposé est impossible. Ainsi donc, $\alpha A_1 + \beta A_2$ et $\alpha B_1 + \beta B_2$ ne peuvent s'annuler simultanément, et l'égalité (2) est bien une équation (d'inconnues y et x). Nous voyons de plus directement que c'est une équation du premier degré qui détermine par conséquent une droite. Il nous reste à démontrer que cette droite passe par le point S. Soient x_0, y_0 les coordonnées du point S. Etant donné que chacune des droites données passe par le point S, $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$ et $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$ d'où il vient

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0.$$

Nous voyons que les coordonnées du point S satisfont à l'équation (1), et que par conséquent la droite déterminée par l'équation (1) passe par le point S ce qui démontre notre proposition.

Par conséquent, pour toutes les valeurs de α et β non nulles simultanément, une équation de forme (1) détermine des droites du faisceau ayant son centre en S.

Nous allons démontrer maintenant que *dans une équation* (1) *on peut toujours choisir les nombres* α *et* β *de façon à ce que l'équation rende compte de n'importe quelle droite (fixée à l'avance) du faisceau ayant son centre en* S. Etant donné que toute droite du faisceau ayant son centre en S est déterminée, en plus du point S, par un autre de ses points, il suffit, pour prouver ce qui vient d'être énoncé, d'établir qu'il est toujours possible de choisir dans l'équation (1) les nombres α et β de façon que la droite qu'ils déterminent passe par un certain point fixé d'avance M^* $(x^*; y^*)$. Or, c'est évident; en effet, la droite déterminée par l'équation (1) passera par le point M^* si les coordonnées du point M^* satisfont à cette équation, autrement dit si

$$\alpha(A_1x^* + B_1y^* + C_1) + \beta(A_2x^* + B_2y^* + C_2) = 0. \qquad (3)$$

Considérons que le point M^* ne coïncide pas avec le point S (c'est le seul cas qui nous intéresse). Alors un au moins des deux nombres

$$A_1x^* + B_1y^* + C_1, \quad A_2x^* + B_2y^* + C_2$$

n'est pas nul, et par conséquent, l'égalité (3) n'est pas une identité, mais bien une équation du premier degré à deux inconnues α et β; pour trouver les inconnues α et β, il faut attribuer à l'une d'elles une valeur numérique quelconque et calculer l'autre à partir de cette équation; par exemple, si $A_2x^* + B_2y^* + C_2 \neq 0$ on peut attribuer à α une valeur arbitraire (différente de zéro) et déterminer β de l'égalité

$$\beta = -\frac{A_1x^* + B_1y^* + C_1}{A_2x^* + B_2y^* + C_2}\alpha.$$

Ainsi donc l'équation (1) permet de déterminer une droite passant par un point quelconque fixé à l'avance du plan et, par suite, n'importe quelle droite du faisceau ayant S pour centre. C'est pourquoi on appelle une équation de forme (1) *équation d'un faisceau de droites (ayant* S *pour centre)*.

Si $\alpha \neq 0$, en posant $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ nous obtiendrons à partir de l'équation (1):

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \qquad (4)$$

Pratiquement l'équation du faisceau de droites est plus souvent utilisée sous cette forme que sous la forme (1). Il est toutefois nécessaire de remarquer qu'étant donné que le cas où $\alpha = 0$ est exclu lors du passage de l'équation (1) à l'équation (4), l'équation (4) ne permet pas de déterminer la droite $A_2x + B_2y + C_2 = 0$; en d'autres termes, les équations de forme (4) déterminent pour les divers λ toutes les droites du faisceau à l'exception d'une (de la deuxième des deux droites données).

Exemple. Soient deux droites $2x + 3y - 5 = 0$, $7x + 15y + 1 = 0$ et S leur point d'intersection. Etablir l'équation de la droite passant par le point S et perpendiculaire à la droite $12x - 5y - 1 = 0$.

Solution. Vérifions tout d'abord l'énoncé du problème. Les deux droites ont bien un point commun et un seul car $\frac{2}{7} \neq \frac{3}{15}$. Ecrivons ensuite l'équation du faisceau de droites ayant son centre en S :

$$2x+3y-5+\lambda(7x+15y+1)=0. \tag{5}$$

Pour isoler de ce faisceau la droite que nous cherchons, calculons λ en nous appuyant sur la condition de perpendicularité de cette droite et de la droite $12x-5y-1=0$.

Représentons l'équation (5) sous la forme

$$(2+7\lambda)\,x+(3+15\lambda)\,y+(-5+\lambda)=0, \tag{6}$$

et nous trouvons le coefficient angulaire de la droite demandée :

$$k=-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda}.$$

La droite donnée a un coefficient angulaire

$$k_1=\frac{12}{5}.$$

Suivant la condition de perpendicularité $k=-\frac{1}{k_1}$, c'est-à-dire

$$-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda}=-\frac{5}{12}.$$

D'où $\lambda=-1$. En substituant $\lambda=-1$ dans l'équation (6), nous trouvons $-5x-12y-6=0$, c'est-à-dire

$$5x+12y+6=0.$$

Le problème est résolu.

CHAPITRE V

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES COURBES DU SECOND DEGRÉ

Nous étudierons dans ce chapitre trois courbes du second degré : l'ellipse, l'hyperbole et la parabole. Ce chapitre a pour but de faire connaître au lecteur les principales propriétés géométriques de ces courbes.

§ 24. L'ELLIPSE. DÉFINITION DE L'ELLIPSE ET ÉTABLISSEMENT DE SON ÉQUATION CANONIQUE

70. *On appelle ellipse le lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points fixes du plan, appelés foyers, est une grandeur constante* ; il est nécessaire que cette constante soit *supérieure à la distance entre les foyers*. On désigne habituellement les foyers de l'ellipse par F_1 et F_2.

Remarque. La somme des distances d'un point M quelconque à deux points fixes F_1 et F_2 ne peut manifestement pas être inférieure à la distance entre ces deux points F_1, F_2. Cette somme est égale à la distance F_1F_2 si et seulement si le point M est situé sur le segment F_1F_2. Par conséquent, le lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points fixes F_1 et F_2 est une longueur constante égale à la distance entre F_1 et F_2, est simplement le segment F_1F_2. Ce cas est exclu par la restriction formulée à la fin de la définition précédente.

71. Soit M un point quelconque d'une ellipse dont les foyers sont F_1 et F_2. Les segments F_1M et F_2M sont appelés (de même que les longueurs de ces segments) *rayons focaux* du point M. On désigne la somme des rayons focaux des points de l'ellipse par $2a$. Nous avons donc pour tout point M de l'ellipse :

$$F_1M + F_2M = 2a. \tag{1}$$

La distance F_1F_2 entre les foyers est désignée par $2c$. Etant donné que

$$F_1M + F_2M > F_1F_2,$$

nous aurons

$$2a > 2c, \text{ c'est-à-dire } a > c. \tag{2}$$

Le procédé suivant, qui permet de tracer grossièrement une ellipse découle directement de la définition de cette courbe: on fixe les extrémités d'un fil inextensible de longueur égale à $2a$ aux points F_1 et F_2 et l'on tend le fil avec la pointe d'un crayon. En glissant le long du fil la pointe du crayon tracera une ellipse dont les foyers seront F_1 et F_2 et la somme des distances focales $2a$. L'ellipse une fois tracée, on peut se convaincre de visu que c'est une courbe convexe fermée (un ovale), symétrique par rapport à la droite F_1F_2 ainsi

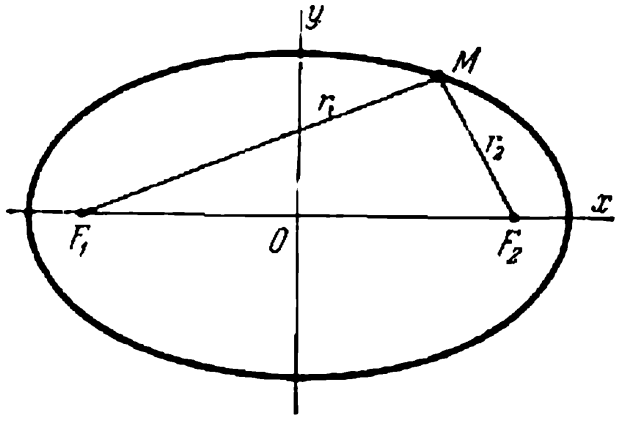


Fig. 46

que par rapport à la médiatrice du segment F_1F_2 (fig. 46). Nous établirons ci-dessous analytiquement la forme de l'ellipse en discutant son équation. L'équation de l'ellipse sera établie ci-dessous.

72. Soit une ellipse quelconque de foyers F_1, F_2 (nous considérons a et c comme donnés). Appliquons sur le plan un système de coordonnées cartésiennes orthogonales aux axes duquel nous donnerons une disposition particulière; plus précisément, nous prendrons pour axe des abscisses la droite F_1F_2, la considérant comme orientée de F_1 vers F_2, l'origine des coordonnées étant fixée au milieu du segment F_1F_2 (fig. 46). Déduisons l'équation de l'ellipse dans le système de coordonnées ainsi choisi.

Prenons dans le plan un point M quelconque et désignons ses coordonnées par x et y. Désignons de plus par r_1 et r_2 les distances du point M aux foyers ($r_1 = F_1M$; $r_2 = F_2M$). Le point M sera situé sur l'ellipse donnée si et seulement si

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{3}$$

Pour obtenir l'équation que nous cherchons, il faut remplacer dans l'égalité (3) r_1 et r_2 par leurs expressions à l'aide des coordonnées x et y.

Remarquons que comme $F_1F_2 = 2c$ et étant donné que les foyers F_1 et F_2 sont disposés sur l'axe Ox symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées, les coordonnées de ces foyers sont respec-

tivement $(-c; 0)$ et $(+c; 0)$. Appliquant à présent la formule (2), n° 18, nous trouvons:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{4}$$

En substituant ces expressions à r_1 et r_2 dans l'égalité (3) nous aurons:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{5}$$

C'est précisément l'équation de l'ellipse considérée dans le système de coordonnées choisi, car les coordonnées du point $M(x; y)$ lui satisfont si et seulement si le point M est sur l'ellipse. Nous allons maintenant simplifier cette expression.

Isolons dans l'équation (5) le premier radical, après quoi nous élèverons les deux membres au carré; nous aurons:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2, \tag{6}$$

ou bien

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \tag{7}$$

En élevant au carré les deux membres de la dernière égalité, nous trouvons

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \tag{8}$$

d'où

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{9}$$

Nous introduirons à présent une nouvelle grandeur

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}; \tag{10}$$

le sens géométrique de la grandeur b sera examiné dans la suite de l'exposé; nous nous bornerons à remarquer que $a > c$, et que par conséquent $a^2 - c^2 > 0$. La grandeur b est donc réelle.

De l'équation (10) nous déduisons

$$b^2 = a^2 - c^2, \tag{11}$$

ce qui nous permet de donner à l'équation (9) la forme suivante

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

ou enfin

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{12}$$

Démontrons que *l'équation* (12) *est l'équation de l'ellipse considérée*. Ce n'est pas évident en soi, étant donné que nous avons obtenu l'équation (12) à partir de l'équation (5) en supprimant deux fois les radicaux. Une chose est évidente, c'est que l'équation (12) dé-

rive de l'équation (5). Nous devons démontrer que l'équation (5) dérive à son tour de l'équation (12), autrement dit que les deux équations sont équivalentes.

Supposons que y et x soient deux nombres quelconques pour lesquels l'égalité (12) est vraie. Reprenant les calculs précédents en sens inverse, nous obtenons d'abord l'équation (9) puis l'équation (8) que nous écrirons maintenant sous la forme:

$$a^2[(x-c)^2+y^2]=(a^2-cx)^2.$$

Extrayant les racines carrées des deux membres de cette égalité, nous aurons

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm(a^2-cx). \tag{13}$$

Remarquons à présent qu'en vertu de l'équation (12) nous devons avoir $|x| \leqslant a$. Etant donné que $|x| \leqslant a$ et $c < a$, nous avons $|cx| < a^2$. Par conséquent, le nombre $a^2 - cx$ est positif. Nous devons donc prendre le signe $+$ devant le second membre de l'égalité (13). Nous avons ainsi abouti à l'égalité (7) d'où nous obtenons l'égalité (6). Donnons-lui la forme suivante:

$$(x+c)^2+y^2=[2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}]^2,$$

d'où

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}). \tag{14}$$

Examinons la grandeur

$$(x-c)^2+y^2=x^2-2cx+c^2+y^2. \tag{15}$$

En vertu de l'égalité (12) nous avons $x^2 \leqslant a^2$. Ensuite $|cx| < a^2$ d'où le nombre $-2cx$ est inférieur en valeur absolue à $2a^2$. Nous pouvons de plus conclure en nous basant sur l'égalité (12) que $y^2 \leqslant b^2$, c'est-à-dire que $y^2 \leqslant a^2 - c^2$ ou $c^2 + y^2 \leqslant a^2$. Toute la somme qui constitue le second membre de l'égalité (15) est donc inférieure à $4a^2$ d'où il découle que la racine de cette somme est inférieure à $2a$. C'est pourquoi la grandeur qui figure entre parenthèses dans le second membre de l'égalité (14) est positive. Il faut donc prendre le signe $+$ devant la parenthèse de l'égalité (14).

On a:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

d'où nous obtenons directement l'égalité (5).

Ainsi donc l'équation (5) découle de l'équation (12), de même que l'équation (12) découle de l'équation (5). Nous avons donc démontré que l'équation (12) était l'équation de l'ellipse donnée, étant donné qu'elle est équivalente à l'équation (5).

L'équation (12) est dite équation *canonique* de l'ellipse.

73. L'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

qui détermine une ellipse dans un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, est une équation du second degré. Nous voyons donc que l'*ellipse est une courbe du second degré.*

§ 25. DISCUSSION DE LA FORME DE L'ELLIPSE

74. Nous avons décrit plus haut, dans le n° 71, la forme de l'ellipse en nous appuyant sur des considérations de valeur descriptive. Etudions à présent la forme de l'ellipse en discutant son équation canonique

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Soulignons tout d'abord une particularité algébrique de l'équation (1) : *elle contient des termes ne comportant que des puissances paires des coordonnées courantes.*

A cette particularité algébrique de l'équation (1) correspond une particularité géométrique importante de la courbe qu'elle détermine, qui est que l'ellipse déterminée par l'équation (1) est symétrique tant par rapport à l'axe Ox que par rapport à l'axe Oy.

En effet si le point $M\ (x;\ y)$ est un point quelconque de cette ellipse, autrement dit si les coordonnées x et y satisfont à l'équation (1), les nombres x et $-y$ satisfont également à l'équation (1), ce qui indique que le point $M'\ (x;\ -y)$ se trouve également sur cette ellipse. Mais le point $M'\ (x;\ -y)$ est symétrique au point $M\ (x;\ y)$ par rapport à l'axe Ox. Nous voyons donc que tous les points de l'ellipse sont disposés deux à deux symétriquement par rapport à l'axe Ox. Autrement dit, si nous plions le graphique suivant l'axe Ox la partie supérieure de l'ellipse viendra s'appliquer sur sa partie inférieure, ce qui, précisément, signifie que l'ellipse est symétrique par rapport à l'axe Ox.

La symétrie de l'ellipse considérée par rapport à l'axe Oy se démontre d'une façon tout à fait analogue (en s'appuyant sur le fait que si les nombres x et y satisfont à l'équation (1), les nombres $-x$ et y y satisfont également).

Pour discuter la forme de l'ellipse, exprimons y en fonction de x à partir de l'équation (1). Il vient

$$y=\pm\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$$

soit

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \qquad (2)$$

Etant donné que l'ellipse est symétrique par rapport à chacun des axes de coordonnées, il suffit de prendre en considération la portion d'ellipse qui est située dans le premier quadrant.

Comme la portion d'ellipse considérée est disposée dans le demi-plan supérieur, il faudra prendre le signe + dans l'équation (2). Comme de plus elle est située dans le demi-plan droit, pour tous ses points $x \geqslant 0$. Nous devons donc tracer le graphique de la fonction

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{3}$$

pour $x \geqslant 0$.

Prenons d'abord $x = 0$. Alors $y = b$. Le point B $(0; b)$ sera le point extrême à gauche du graphique que nous devons tracer. Faisons croître x à partir de 0. Il est évident que lorsque la valeur de

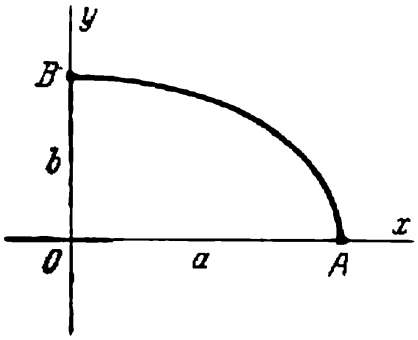


Fig. 47

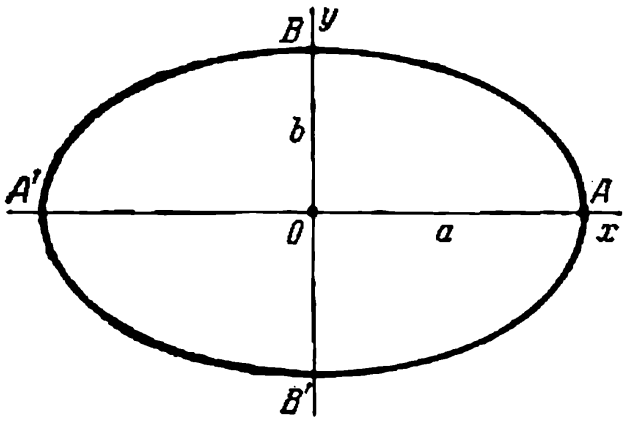


Fig. 48

x croît, l'expression sous le radical dans la formule (3) décroît; la valeur de y diminuera donc également. Par conséquent, le point M $(x; y)$ variable qui décrit la courbe considérée se déplace vers la droite et vers le bas (fig. 47). Lorsque x deviendra égal à a nous aurons $y = 0$. A ce moment-là le point M $(x; y)$ coïncide avec le point A $(a; 0)$, situé sur l'axe Ox. Si x augmente encore, autrement dit pour $x > a$, l'expression sous le radical dans l'équation (3) devient négative, et y devient imaginaire. Il en découle que le point A est le point extrême à droite du graphique. Ainsi donc l'arc BA représenté sur la fig. 47 est la portion de l'ellipse située dans le premier quadrant du système de coordonnées.

En traçant des courbes symétriques à cette première par rapport aux axes de coordonnées, nous obtiendrons le graphique de l'ellipse tout entière. Elle a la forme d'un ovale convexe dont les deux axes de symétrie sont perpendiculaires (fig. 48).

On appelle habituellement les axes de symétrie de l'ellipse *axes* tout court, et le point d'intersection des axes *centre* de l'ellipse. Les

points d'intersection de l'ellipse et de ses axes sont dits *sommets* de l'ellipse. Sur la fig. 48 les points A, A', B, B' sont les sommets de l'ellipse. Remarquons que l'on appelle aussi couramment axes les segments $AA' = 2a$ et $BB' = 2b$. Si l'ellipse est disposée par rapport aux axes de coordonnées comme décrit au n° 72, c'est-à-dire si ses foyers sont situés sur l'axe Ox, nous avons $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ et, par conséquent, $a > b$.

Dans ce cas, on appelle le segment $OA = a$ *demi-grand axe* de l'ellipse et le segment $OB = b$ *demi-petit axe*. Mais il va de soi que l'ellipse déterminée par l'équation (1) peut être disposée de façon que ses foyers soient situés sur l'axe Oy. Dans ce cas $b > a$ et c'est le segment $OB = b$ qui sera le *demi-grand axe*. Quoi qu'il en soit, la longueur du segment OA *sur l'axe des abscisses* est désignée par a et la longueur du segment OB *sur l'axe des ordonnées* par b.

Remarque. Sur la figure 47 la portion d'ellipse disposée dans le premier quadrant du système de coordonnées est représentée par une courbe BA à la convexité tournée vers le haut. On voit de plus sur la fig. 47 que la direction de cette courbe est perpendiculaire à l'axe Oy au point B et à l'axe Ox au point A (à la suite de quoi l'ellipse complète ne présente point de saillies). Nous n'avons toutefois pas démontré que cette courbe BA possède réellement cette propriété. Nous ne nous attarderons cependant pas à cette démonstration qu'il est bien plus rationnel de faire en usant des méthodes de l'analyse mathématique.

75. Dans le cas particulier où $b = a$, l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

prend la forme

$$x^2 + y^2 = a^2;$$

cette équation définit un cercle de rayon a (ayant son centre à l'origine des coordonnées). En vertu de cet état de choses on considère le cercle comme un cas particulier de l'ellipse.

§ 26. EXCENTRICITÉ DE L'ELLIPSE

76. *On appelle excentricité de l'ellipse le rapport de la distance des foyers, ou distance focale de l'ellipse, à la longueur de son grand axe.*

En désignant l'excentricité par la lettre ε, nous avons

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Si $c < a$, alors $\varepsilon < 1$, autrement dit *l'excentricité de l'ellipse est inférieure à l'unité.*

Remarquons que $c^2 = a^2 - b^2$. Il vient

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

d'où

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \text{et} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Par conséquent, l'excentricité est déterminée par le rapport des axes de l'ellipse, et le rapport des axes, à son tour, est déterminé par l'excentricité. Donc, *l'excentricité caractérise la forme de l'ellipse.* Plus l'excentricité se rapproche de 1, plus la grandeur $1 - \varepsilon^2$ diminue de même que le rapport $\frac{b}{a}$; par conséquent, *plus l'excentricité est grande, plus l'ellipse est allongée.* Dans le cas du cercle, $b = a$ et $\varepsilon = 0$.

§ 27. EXPRESSIONS RATIONNELLES DES RAYONS FOCAUX DE L'ELLIPSE

77. Soit un point quelconque $M(x; y)$ situé sur une ellipse donnée. Si r_1 et r_2 sont les rayons focaux de ce point

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{1}$$

Mais on peut indiquer d'autres formules exemptes de radicaux pour exprimer les rayons focaux.

En effet, en vertu de l'égalité (7), n° 72, nous avons :

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x.$$

En posant $\frac{c}{a} = \varepsilon$ et prenant en considération la deuxième formule de (1), nous obtenons :

$$r_2 = a - \varepsilon x.$$

En vertu de la définition de l'ellipse $r_1 + r_2 = 2a$. Il vient :

$$r_1 = a + \varepsilon x.$$

Nous avons donc

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= a + \varepsilon x, \\ r_2 &= a - \varepsilon x. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ces formules seront amplement utilisées au § 34.

§ 28. TRACÉ DE L'ELLIPSE PAR POINTS. ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES DE L'ELLIPSE

78. Soit l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Décrivons deux cercles de rayons a et b de centre O de l'ellipse (avec $a>b$). Traçons à partir du centre une demi-droite quelconque et désignons par t l'angle polaire de cette demi-droite

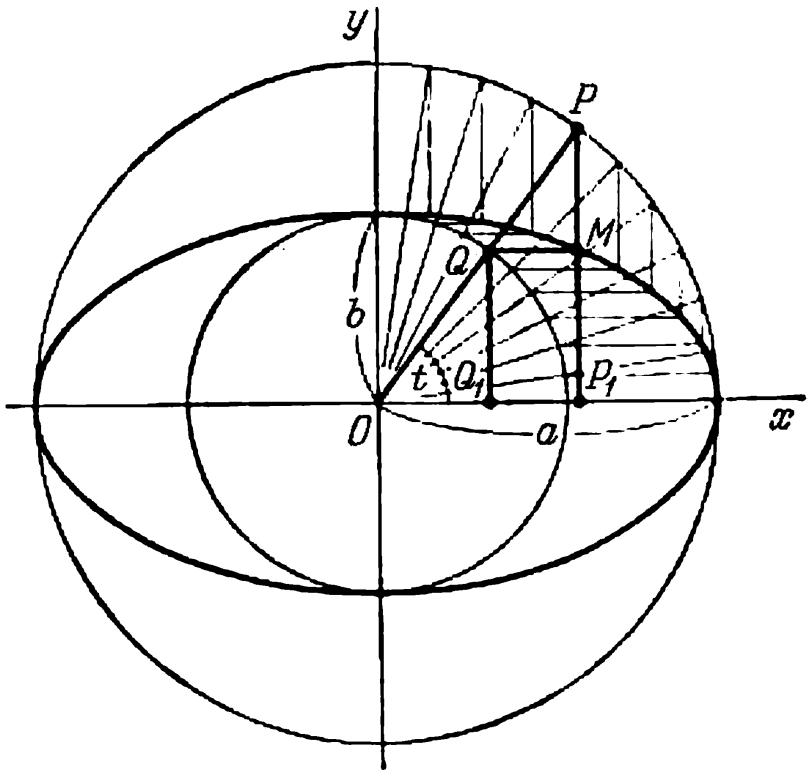


Fig. 49

(fig. 49). Cette demi-droite coupera le grand cercle au point P et le petit cercle au point Q. Traçons ensuite par le point P une droite parallèle à l'axe Oy et par le point Q une droite parallèle à l'axe Ox. Soit M le point d'intersection de ces droites et P_1 et Q_1 les projections des points P et Q sur l'axe des abscisses.

Exprimons les coordonnées du point M à l'aide de t. D'après la fig. 49 il est facile de voir que

$$x=OP_1=OP\cdot\cos t=a\cos t,$$
$$y=P_1M=Q_1Q=OQ\cdot\sin t=b\sin t.$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= b\sin t. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

En substituant ces valeurs à x et y dans l'équation (1) nous pouvons nous convaincre qu'elles lui satisfont pour toute valeur de t. Le point M est donc situé sur l'ellipse donnée. Nous avons ainsi indiqué comment obtenir un point quelconque de l'ellipse. Traçant une série de demi-droites et effectuant les opérations susindiquées pour chacune d'elles, nous pourrons obtenir tous les points de l'ellipse. Ce procédé est souvent utilisé en pratique (on joint ensuite les points obtenus à l'aide d'un pistolet, ce qui permet de réaliser des tracés d'ellipses tout à fait satisfaisants du point de vue pratique).

79. Les équations (2) expriment les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse en fonction d'un paramètre variable t. Par conséquent, *les équations* (2) *sont les équations paramétriques de l'ellipse* (voir § 14).

§ 29. L'ELLIPSE EN TANT QUE PROJECTION D'UN CERCLE SUR UN PLAN. ELLIPSE EN TANT QUE SECTION PLANE D'UN CYLINDRE DE RÉVOLUTION

80. Nous allons démontrer ici que *toute projection d'un cercle sur un plan quelconque est une ellipse.*

Soit un cercle k appartenant au plan β, projetant sur le plan α. Désignons par k' le lieu géométrique de toutes les projections de tous les points du cercle k; il s'agit de démontrer que k' est une ellipse. Pour simplifier le raisonnement, nous supposerons que le plan α passe par le centre du cercle k (fig. 50). Appliquons au plan α un système de coordonnées cartésiennes orthogonales en prenant pour axe Ox la droite suivant laquelle les plans β et α se coupent et pour origine des coordonnées le centre du cercle k. Désignons par a le rayon du cercle k, par φ l'angle aigu entre les plans α et β. Soit P un point quelconque du cercle k, M sa projection sur le plan α, Q la projection sur l'axe Ox, t l'angle que forme le segment OP avec l'axe Ox. Exprimons à l'aide de t les coordonnées du point M. Il est facile de voir d'après la fig. 50 que

$$x = OQ = OP\cdot\cos t = a\cos t,$$

$$y = QM = QP\cdot\cos\varphi = OP\cdot\sin t\cos\varphi = a\cos\varphi\sin t.$$

En désignant la valeur constante $a\cos\varphi$ par b, nous avons :

$$x = a\cos t,$$

$$y = b\sin t.$$

Ces équations coïncident exactement avec les équations paramétriques de l'ellipse (v. n° 78); la courbe k' est donc bien une ellipse (dont le grand axe est a et le petit axe $b = a \cos \varphi$).

81. Il est également facile de montrer que *toute section d'un cylindre de révolution par un plan non parallèle à son axe est une ellipse.*

Pour le démontrer, considérons un cylindre de révolution quelconque et un plan sécant α (fig. 51); la courbe qui résulte de l'inter-

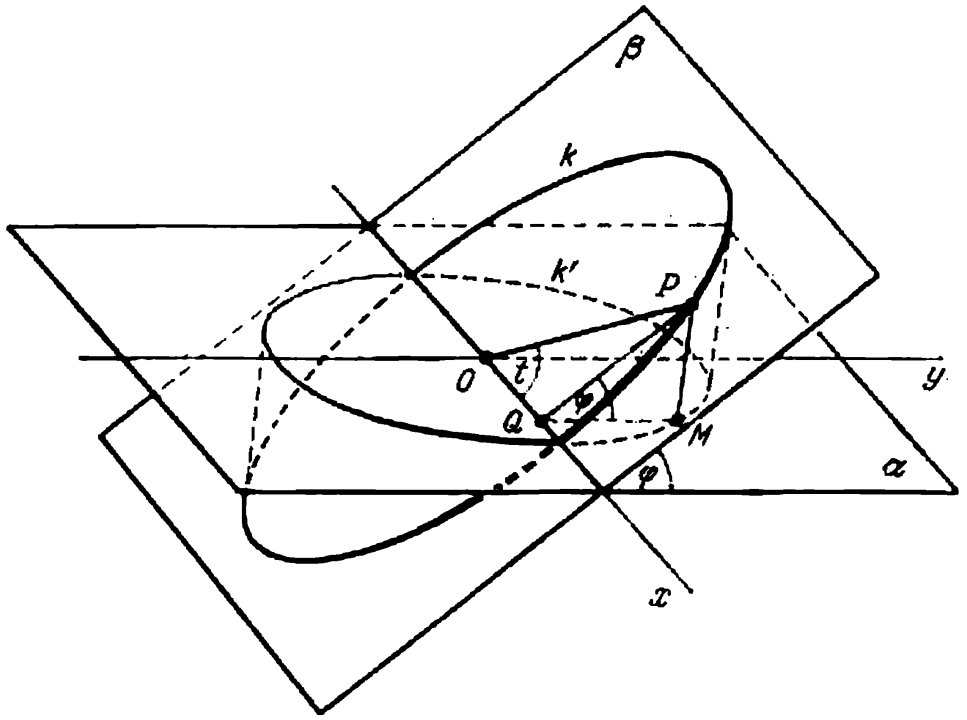


Fig. 50

section du plan et du cylindre sera désignée par k'. Soit O le point où le plan α coupe l'axe du cylindre. Faisons passer par O un plan β perpendiculaire à l'axe du cylindre. Ce plan coupera le cylindre suivant le cercle k. Désignons par a le rayon de ce cercle et par φ l'angle aigu entre les plans α et β. Choisissons ensuite sur le plan α des axes de coordonnées comme indiqué sur la fig. 51. Prenons sur la courbe k' un point quelconque M; soit P sa projection sur le plan β, Q sa projection sur l'axe Ox, t l'angle entre le segment OP et l'axe Ox. Exprimons à l'aide de t les coordonnées du point M. Nous aurons:

$$x = OQ = OP \cdot \cos t = a \cos t,$$

$$y = QM = \frac{QP}{\cos \varphi} = \frac{OP \cdot \sin t}{\cos \varphi} = \frac{a}{\cos \varphi} \sin t.$$

En posant $\frac{a}{\cos\varphi} = b$, nous aurons :

$$x = a\cos t,$$
$$y = b\sin t.$$

Ces équations sont les équations paramétriques de l'ellipse. Par conséquent, la courbe k' est une ellipse, ce qu'il fallait démontrer.

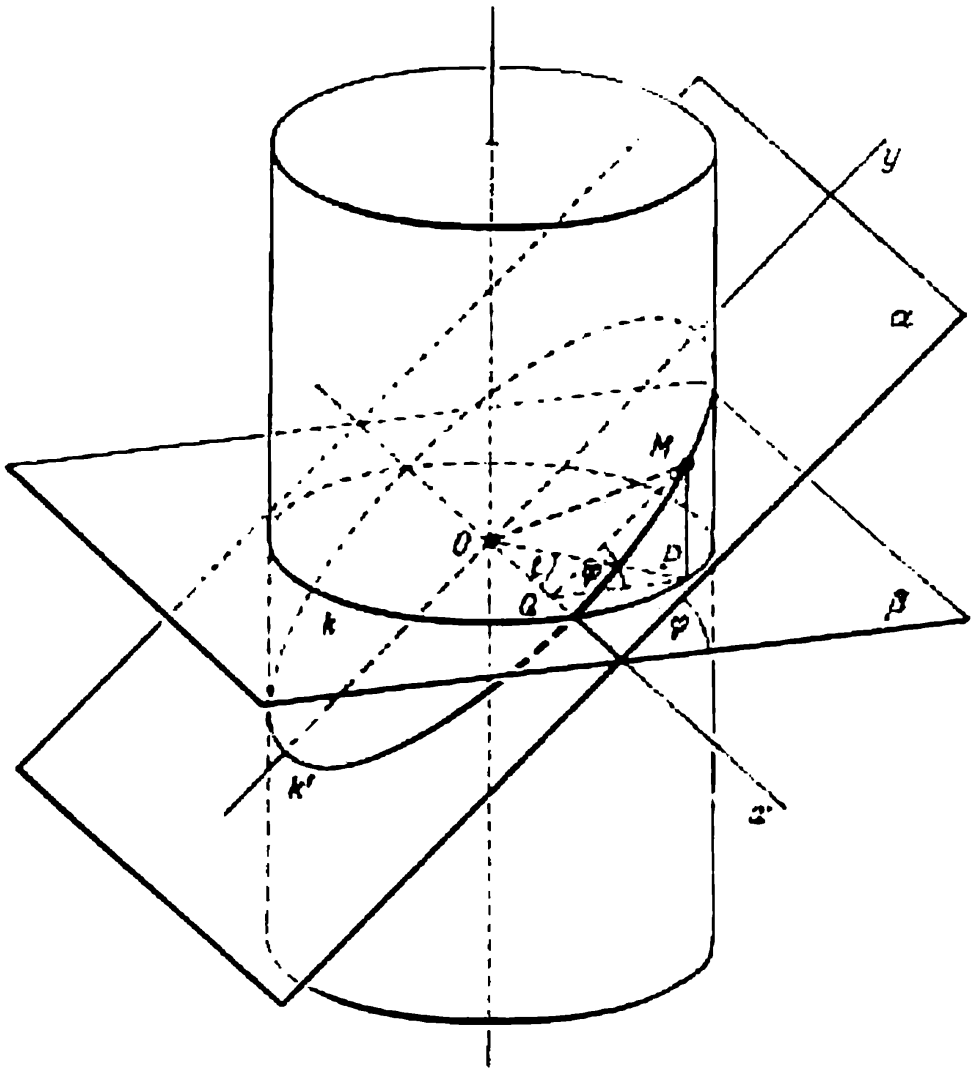


Fig. 51

Remarquons que $\frac{a}{\cos\varphi} > a$; par conséquent, a est le petit axe de l'ellipse k', $b = \frac{a}{\cos\varphi}$ son grand axe, autrement dit l'ellipse est allongée dans le sens de l'axe Oy.

Le fait que l'ellipse soit une section plane du cylindre de révolution et également la projection d'un cercle sur un plan rend cette courbe facile à se représenter.

§ 30. L'HYPERBOLE. DÉFINITION DE L'HYPERBOLE ET ÉTABLISSEMENT DE SON ÉQUATION CANONIQUE

82. *On appelle hyperbole le lieu géométrique des points d'un plan dont la valeur absolue de la différence des distances à deux points fixes de ce plan est constante*; on exige en outre qu'elle soit *inférieure à*

Fig. 52

la distance entre ces points, appelés foyers, et différente de zéro. On désigne habituellement les foyers de l'hyperbole par F_1 et F_2 et la distance entre eux par $2c$.

R e m a r q u e. La différence des distances d'un point M quelconque à deux points fixes F_1 et F_2 ne peut évidemment pas être supérieure à la distance entre ces points. Cette différence est égale

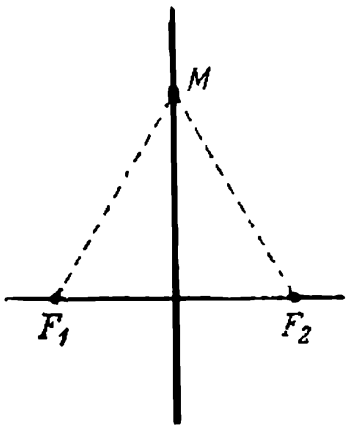


Fig. 53

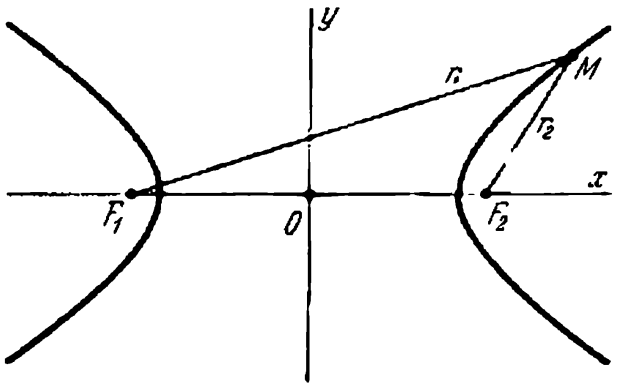


Fig. 54

à la distance entre F_1 et F_2 si et seulement si le point M se trouve sur le prolongement du segment F_1F_2. Par conséquent, le lieu géométrique des points dont la différence des distances à deux points fixes F_1 et F_2 est une grandeur constante, égale à la distance de F_1 à F_2, est constitué par les deux prolongements du segment F_1F_2 (fig. 52).

Si la différence des distances d'un point M quelconque à deux points fixes F_1 et F_2 est nulle, ce point est équidistant des points F_1 et F_2. Par conséquent, le lieu géométrique des points dont la différence des distances à deux points fixes F_1 et F_2 est une grandeur constante n u l l e est la médiatrice du segment F_1F_2 (fig. 53).

Ces cas sont exclus vu les restrictions mentionnées dans la définition précédente.

83. Soit M un point quelconque d'un hyperbole dont les foyers sont F_1 et F_2 (fig. 54). Les segments F_1M et F_2M (de même que les

longueurs de ces segments) sont appelés *rayons focaux* du point M et désignés par r_1 et r_2 ($F_1M = r_1$; $F_2M = r_2$). D'après la définition de l'hyperbole, la différence des rayons focaux du point M est une grandeur constante (autrement dit lorsque le point M se déplace le long de l'hyperbole, la différence des rayons focaux ne varie pas). On désigne habituellement cette constante par $2a$. Par conséquent, nous avons pour tout point M de l'hyperbole soit

$$F_1M - F_2M = 2a, \tag{1}$$

si le point M est plus proche de F_2, soit

$$F_2M - F_1M = 2a, \tag{2}$$

si le point M est plus proche de F_1.

Etant donné que par définition $F_1M - F_2M < F_1F_2$ et $F_2M - F_1M < F_1F_2$ nous avons $2a < 2c$, c'est-à-dire

$$a < c. \tag{3}$$

Nous déduirons ci-dessous l'équation de l'hyperbole, puis, analysant cette équation, nous établirons sa forme. Nous verrons que l'hyperbole est formée de deux parties distinctes, appelées branches de l'hyperbole, qui s'étendent indéfiniment en deux directions; l'hyperbole entière est symétrique par rapport à la droite F_1F_2 ainsi que par rapport à la médiatrice du segment F_1F_2 (voir fig. 54).

84. Soit une hyperbole quelconque de foyers F_1 et F_2 (nous considérerons a et c comme donnés). Introduisons dans le plan un système de coordonnées cartésiennes orthogonales dont les axes sont disposés d'une façon spéciale par rapport à cette hyperbole; nous prendrons en qualité d'axe des abscisses la droite F_1F_2 en la considérant comme orientée de F_1 vers F_2 et en plaçant l'origine des coordonnées au milieu de F_1F_2 (fig. 54).

Etablissons l'équation de l'hyperbole dans le système de coordonnées que nous venons d'introduire. Choisissons sur le plan un point quelconque M en désignant ses coordonnées par x et y et ses rayons focaux F_1M et F_2M par r_1 et r_2. Le point M sera situé sur l'hyperbole considérée si et seulement si $r_1 - r_2 = 2a$ ou $r_2 - r_1 = 2a$. Unissons les deux dernières égalités en écrivant

$$r_1 - r_2 = \pm 2a. \tag{4}$$

Pour obtenir l'équation cherchée nous devons remplacer dans l'égalité (4) les variables r_1 et r_2 par les expressions correspondantes comportant les coordonnées courantes x et y. Etant donné que $F_1F_2 = 2c$ et que les foyers F_1 et F_2 sont situés sur l'axe Ox symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées, leurs coordonnées respectives sont $(-c\,;\ 0)$ et $(+c\,;\ 0)$. Prenant ce fait en considération

et appliquant la formule (2), n° 18, nous trouvons:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{5}$$

En substituant à r_1 et r_2 les expressions trouvées dans l'égalité (4), nous aurons:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a. \tag{6}$$

Telle est l'équation de l'hyperbole considérée dans le système de coordonnées choisi, car les coordonnées du point $M(x; y)$ lui satisfont si et seulement si le point M est situé sur notre hyperbole (en fait, nous avons ici deux équations, une pour la branche droite, l'autre pour la branche gauche de l'hyperbole).

Les calculs ultérieurs sont destinés à obtenir l'équation de l'hyperbole sous une forme plus simple. Isolons le premier radical de l'équation (6) puis élevons au carré les deux membres. On aura:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2, \tag{7}$$

soit

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{8}$$

Elevons les deux membres de cette équation au carré. Il vient

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2, \tag{9}$$

d'où

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2). \tag{10}$$

Introduisons à présent la nouvelle grandeur

$$b = \sqrt{c^2-a^2}; \tag{11}$$

le sens géométrique de b sera expliqué plus bas. Nous nous bornons pour le moment à remarquer que $c > a$ (v. n° 83), et que par conséquent $c^2 - a^2 > 0$ et la grandeur b est une valeur réelle. De l'égalité (11) nous avons

$$b^2 = c^2 - a^2,$$

ce qui nous permet de donner à l'égalité (10) la forme suivante

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

soit encore

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{12}$$

Nous allons démontrer à présent que *l'équation* (12) *est l'équation de l'hyperbole donnée*. Cela n'est pas évident en soi, étant donné que nous avons obtenu l'équation (12) à partir de l'équation (6) en faisant disparaître deux fois des radicaux. Une seule chose est évidente, c'est que l'équation (12) résulte de l'équation (6).

Nous avons donc à démontrer que l'équation (6) résulte à son tour de l'équation (12), autrement dit que ces équations sont équivalentes.

Admettons que x et y soient deux nombres pour lesquels l'égalité (12) est vraie. En reprenant les calculs en sens inverse, nous obtiendrons à partir de l'égalité (12) tout d'abord l'équation (10), puis l'égalité (9) que nous écrivons à présent comme suit:

$$(cx - a^2)^2 = a^2 [(x-c)^2 + y^2].$$

Extrayant la racine carrée des deux membres de cette équation, nous obtenons

$$cx - a^2 = \pm a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{13}$$

Si le point $(x; y)$ est situé dans le demi-plan gauche, $x < 0$, et le membre gauche de l'égalité (13) est négatif. Dans ce cas, c'est donc le signe — qu'il convient de choisir pour le membre droit de l'égalité (13). Si, par contre, le point (x, y) se trouve dans le demi-plan droit, $x > 0$. En vertu de l'équation (12) nous avons $x \geqslant a$. Etant donné que $c > a$, $cx > a^2$, et par conséquent le membre gauche de l'égalité (13) est positif. Il faudra donc dans ce cas choisir le signe + pour le membre droit de l'égalité (13). Nous voyons donc que l'égalité (13) a la même signification que l'égalité (8). Après des transformations appropriées, nous obtenons de l'égalité (8) l'égalité (7) que nous écrivons comme suit:

$$(x+c)^2 + y^2 = \left[\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a\right]^2.$$

D'où nous obtenons

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a\right). \tag{14}$$

Voyons à présent quel signe il convient de choisir *devant les parenthèses* dans le membre droit de cette égalité. Considérons deux cas.

1) Le point $(x; y)$ se trouve dans le demi-plan droit. Il convient alors de prendre le signe + pour l'expression entre parenthèses. Toute la grandeur entre parenthèses sera positive et il conviendra donc de choisir également le signe + devant les parenthèses.

2) Le point $(x; y)$ se trouve dans le demi-plan gauche. Dans ce cas x est négatif et la valeur absolue de la différence $x - c$ est égale à la somme $|x| + c$. En vertu de l'égalité (12) nous avons $|x| \geqslant a$, et de plus $c > a$. Par conséquent, $(x - c)^2 > 4a^2$. La somme $(x - c)^2 + y^2$ est donc à fortiori supérieure à $4a^2$, la racine carrée de cette somme est supérieure à $2a$ et toute l'expression entre parenthèses dans le membre droit de l'égalité (14) est de nouveau positive. Il convient donc dans ce cas également de choisir devant les parenthèses dans l'égalité (14) le signe +. Nous constatons donc que

quelle que soit la position du point $(x; y)$ l'égalité (14) se réduit à la forme

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a,$$

d'où nous obtenons l'égalité (6).

Ainsi donc l'équation (6) résulte de l'équation (12) de même que l'équation (12) résulte de l'équation (6). Nous avons ainsi démontré que l'équation (12) était l'équation de l'hyperbole considérée, étant donné qu'elle est équivalente à l'équation (6).

L'équation (12) est dite *équation canonique de l'hyperbole.*

85. L'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

qui détermine l'hyperbole dans un certain système de coordonnées cartésiennes orthogonales, est une équation du second degré. Par conséquent, *l'hyperbole est une courbe du second degré.*

§ 31. ÉTUDE DE LA FORME DE L'HYPERBOLE

86. Analysons à présent l'hyperbole déterminée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Exprimons y en fonction de x:

$$y = \pm \sqrt{b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)}$$

ou encore

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \tag{2}$$

Etant donné que l'équation (1) ne comporte que des termes à puissances paires des coordonnées x et y, l'hyperbole que cette équation détermine est symétrique par rapport aux axes de coordonnées (la démonstration est analogue à celle qui a été faite pour l'ellipse; v. n° 74). Il est donc évident qu'il suffit d'étudier la portion de l'hyperbole qui se trouve dans le premier quadrant du système de coordonnées.

Etant donné que la partie considérée de l'hyperbole est disposée dans le demi-plan supérieur, c'est le signe + qui lui correspond dans l'équation (2). Et puisqu'en outre elle se trouve dans le demi-plan droit, nous avons pour tous les points $x \geqslant 0$. Nous devons donc analyser la fonction

$$y = +\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \tag{3}$$

pour $x \geqslant 0$ et en tracer le graphique.

Prenons tout d'abord $x = 0$. En remplaçant x par 0 dans le second membre de la formule (3) nous aurons $y = \frac{b}{a}\sqrt{-a^2}$, ce qui donne un nombre imaginaire. Lorsque la valeur de x croît, la valeur de y reste imaginaire jusqu'à ce que $x = a$. En prenant dans le membre droit de la formule (3) $x = a$ nous aurons $y = 0$. Par conséquent, le point extrême à la gauche du graphique sera $A\ (a;\ 0)$. Lorsque x continue d'augmenter, la valeur de y est constamment réelle et positive, ce que l'on voit directement dans la formule (3)

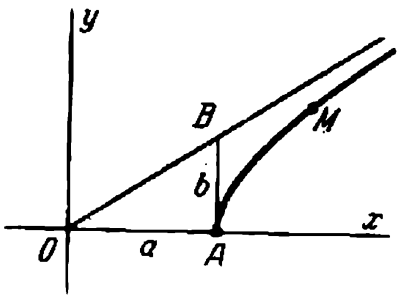


Fig. 55

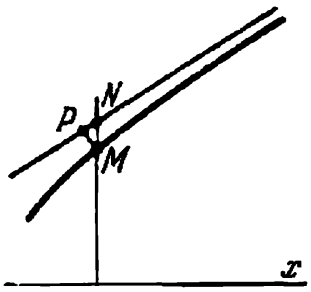


Fig. 56

car pour $x > a$ nous avons $x^2 - a^2 > 0$. La formule (3) indique également que y est une fonction croissante de x (si $x \geqslant a$), autrement dit que y augmente chaque fois que x croît. La formule (3) indique enfin que lorsque x croît indéfiniment y croît de même indéfiniment (pour $x \to \infty$, $y \to \infty$). Vu tout ce qui vient d'être indiqué, nous en venons à la conclusion que pour x croissant à partir de $x = a$ le point variable $M\ (x;\ y)$ qui trace le graphique se déplace toujours vers la « droite » et vers le « haut », à partir du point $A\ (a;\ 0)$. L'éloignement du point M à droite de l'axe Oy et au-dessus de l'axe Ox est infini (fig. 55).

87. Voyons un peu plus attentivement de quelle façon le point M « s'éloigne à l'infini ».

Nous considérerons à cet effet en plus de l'équation

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \tag{4}$$

qui détermine pour $x \geqslant a$ la portion d'hyperbole que nous venons d'étudier, l'équation

$$y = +\frac{b}{a}x; \tag{5}$$

elle détermine une droite de coefficient angulaire $k = \frac{b}{a}$ passant par l'origine des coordonnées. La portion de cette droite disposée dans le premier quadrant de coordonnées est représentée sur la fig. 55

(on a utilisé pour la tracer le triangle rectangle OAB dont les côtés de l'angle droit sont $OA = a$ et $AB = b$; il est évident que le coefficient angulaire de la droite OB est précisément $k = \frac{b}{a}$) .

Nous allons démontrer que, *s'éloignant vers l'infini, le point M se rapproche indéfiniment de la droite* $y = \frac{b}{a}x$.

Choisissons une valeur quelconque de x ($x \geqslant a$) et considérons deux points $M(x; y)$ et $N(x; Y)$, où

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

$$Y = \frac{b}{a}x.$$

Le point $M(x; y)$ est situé sur l'hyperbole (4), le point $N(x; Y)$ sur la droite (5). Etant donné que ces deux points ont la même abscisse x, la droite joignant M et N est perpendiculaire à l'axe Ox (fig. 56). Calculons la longueur du segment MN.

Remarquons tout d'abord que

$$Y = +\frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y. \tag{6}$$

D'où $Y > y$ et, par conséquent, $MN = Y - y$. Mais

$$Y - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a}\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}},$$

autrement dit

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \tag{7}$$

Analysons l'expression que nous avons obtenue en supposant que $x \to +\infty$. Le dénominateur est la somme de deux termes positifs qui croissent indéfiniment. Par conséquent, pour $x \to +\infty$, le dénominateur tend vers l'infini (positif). Le numérateur de cette expression est une grandeur constante ab. Vu ces deux circonstances, nous pouvons conclure que pour $x \to +\infty$ le membre droit de l'égalité (7) tend vers zéro. Par conséquent, $MN = Y - y$ tend également vers zéro.

Désignons par P le point d'intersection de la droite $y = \frac{b}{a}x$ et de la perpendiculaire abaissée sur cette droite du point M (MP est la distance du point M à cette droite). Il est évident que $MP < MN$, et comme $MN \to 0$, nous avons également $MP \to 0$. Ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi donc, *si un point variable M s'éloigne vers l'infini en suivant la portion de l'hyperbole* (1) *qui se trouve dans le premier quadrant du*

système de coordonnées, la distance du point M à la droite $y = \frac{b}{a}x$ *tend vers zéro.*

88. Soit Γ une courbe *quelconque*, M un point variable sur cette courbe et a une certaine droite. S'il est possible que le point M se déplace le long de la courbe Γ de façon que 1) le point M s'éloigne à l'infini, 2) la distance de ce point M à la droite a tende vers zéro, on dit que la courbe Γ se rapproche asymptotiquement de la droite a. La droite a est alors appelée *asymptote* de la courbe Γ.

Usant de la terminologie que nous venons d'indiquer, nous pouvons formuler de la façon suivante le résultat obtenu au n° 87 :

La représentation graphique de la fonction $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (c'est-à-dire de la portion d'hyperbole envisagée) *se rapproche asymptotiquement de la droite* $y = \frac{b}{a}x$ *pour* $x \to +\infty$; ou encore *la droite* $y = \frac{b}{a}x$ *est l'asymptote de la représentation graphique de la fonction* $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (et en même temps l'asymptote de notre hyperbole).

89. Notons encore quelques particularités concernant la disposition de l'hyperbole par rapport à son asymptote (nous ne parlons toujours que de la portion de l'hyperbole qui se trouve dans le premier quadrant).

Prenons de nouveau les points $M(x ; y)$ et $N(x ; Y)$ dont il a été question au n° 87 et souvenons-nous que le point M appartient à l'hyperbole et le point N à l'asymptote. Nous avons établi au n° 87 que l'inégalité $Y > y$ était vraie. Il en découle que le point M est toujours placé « au-dessous » du point N. Autrement dit, la portion de l'hyperbole (1) qui est située dans le premier quadrant du système de coordonnées est sur toute son étendue « au-dessous » de son asymptote.

Nous avons ensuite en vertu de la formule (7)

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Le dénominateur de cette fraction, étant réel et positif pour $x \geqslant a$, croît lorsque x croît. Etant donné que le numérateur est ici une grandeur constante, la valeur de l'expression fractionnaire est décroissante lorsque x est croissant. Nous pouvons donc affirmer que si x tend d'une façon monotone vers $+\infty$ (autrement dit, croît indéfiniment), $MN = Y - y$ tend aussi vers zéro de même façon (c'est-à-dire en décroissant constamment).

Soit φ l'angle d'inclinaison de la droite $y = \frac{b}{a}x$ sur l'axe Ox, P le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur cette droite.

Il est évident que nous avons alors

$$MP = MN \cdot \cos \varphi. \tag{8}$$

Etant donné que MN tend vers zéro et que cos φ est une constante, il résulte de la formule (8) que MP tend vers zéro.

Autrement dit, où qu'il se trouve sur l'hyperbole (4) le point M (toujours dans le premier quadrant des coordonnées) se déplace le long de l'hyperbole toujours vers la « droite » et sa distance par rapport à l'asymptote décroît constamment. Nous avons donc la propriété : *l'hyperbole tend vers son asymptote d'une façon monotone.*

90. Faisons le bilan de tout ce qui a été dit aux nos 86-89.

La portion de l'hyperbole qui se trouve dans le premier quadrant a pour origine le point A $(a; 0)$ *et s'éloigne indéfiniment vers la « droite » et vers le « haut », se rapprochant asymptotiquement de la droite* $y = \frac{b}{a} x$, *« de bas en haut ».*

C'est conformément à ce qui vient d'être exposé que la fig. 55 a été tracée.

Remarque. Deux autres propriétés de la représentation graphique que nous venons d'examiner doivent être mentionnées : 1) la direction de la courbe au point A $(a; 0)$ est perpendiculaire à l'axe Ox, 2) la courbe a partout une convexité tournée vers le haut. Nous ne démontrerons toutefois pas ces propriétés, considérons qu'il est plus approprié d'effectuer la discussion d'une représentation graphique de ce genre en usant des méthodes de l'analyse mathématique.

91. Une fois la portion de l'hyperbole (4) située dans le premier quadrant analysée, la forme générale de l'hyperbole entière peut être facilement établie par rabattement symétrique autour des axes de coordonnées.

L'hyperbole déterminée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est représentée sur la fig. 57. Il est facile de comprendre qu'elle (l'hyperbole entière) a deux asymptotes :

$$y = \frac{b}{a} x$$

et

$$y = -\frac{b}{a} x.$$

La première de ces droites nous est déjà connue, la deuxième est sa symétrique par rapport à l'axe Ox (ou à l'axe Oy).

On appelle ordinairement les axes de symétrie de l'hyperbole ses *axes* tout court et le point d'intersection de ces axes *centre* de

l'hyperbole. (Dans le cas présent nous avons affaire à une hyperbole dont les axes coïncident avec les axes de coordonnées.)

Un des deux axes (dans le cas qui nous intéresse c'est l'axe Ox) coupe l'hyperbole, l'autre ne la coupe pas. Les points d'intersection de l'axe avec l'hyperbole sont appelés *sommets de l'hyperbole*; l'hyperbole a deux sommets (désignés par A et A', fig. 57).

Le rectangle de côtés $2a$ et $2b$, disposé symétriquement par rapport aux axes de l'hyperbole et tangent à l'hyperbole à ses sommets

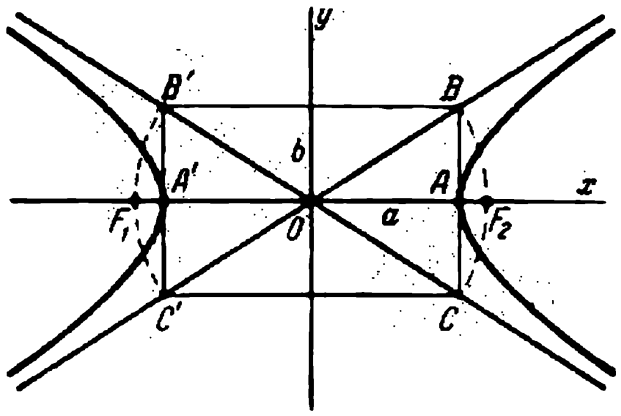


Fig. 57

sera appelé *rectangle de base* (c'est le rectangle $BB'C'C$, fig. 57). Les diagonales du rectangle de base de l'hyperbole coïncident avec les asymptotes.

Notons qu'en mathématiques on appelle couramment aussi axes de l'hyperbole les segments de longueur $2a$ et $2b$ qui joignent les milieux des côtés opposés du rectangle de base. On dit en conséquence que l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

détermine une hyperbole de demi-axes a et b.

Remarque. S'il est nécessaire d'exécuter un croquis d'une hyperbole à demi-axes a et b, il convient avant tout de tracer son rectangle de base, puis les asymptotes. On peut ensuite tracer l'hyperbole elle-même soit au jugé, soit en fixant au préalable sur le dessin quelques-uns de ses points. On voit sur la fig. 57 en pointillé comment déterminer les foyers de l'hyperbole lorsqu'on dispose de son rectangle de base. Ce tracé se base de façon évidente sur l'égalité $c^2 = a^2 + b^2$ (qui découle de la formule (11) n° 84).

92. Considérons à présent l'équation

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (9)$$

Par permutation de a et b et de x et y elle se réduit à l'équation étudiée au paragraphe précédent. Il est donc clair que l'équation (9) détermine une hyperbole disposée comme indiqué sur la fig. 58 (ses sommets B et B' sont situés sur l'axe Oy). L'équation (9) est également appelée équation canonique de l'hyperbole.

93. Deux hyperboles définies par les équations

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

dans le même système de coordonnées et pour les mêmes valeurs de a et b sont dites *conjuguées*.

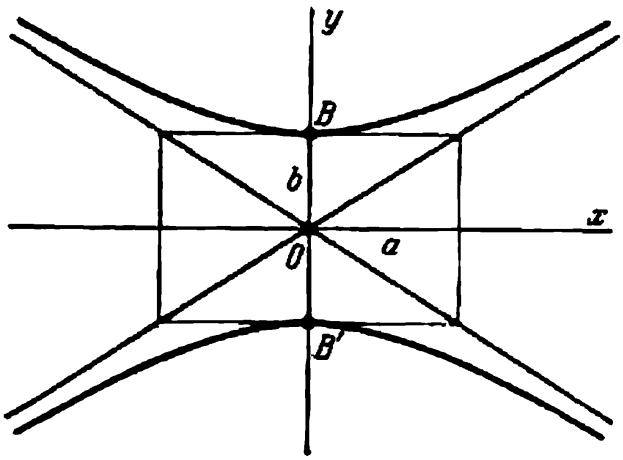


Fig. 58

94. Une hyperbole dont les demi-axes ($a = b$) sont égaux est dite *équilatère*. On peut écrire l'équation d'une hyperbole équilatère sous la forme suivante

$$x^2-y^2=a^2.$$

Il est évident que le rectangle de base d'une hyperbole équilatère est un carré. D'où il est clair que les *asymptotes d'une hyperbole équilatère se coupent à angle droit*.

§ 32. EXCENTRICITÉ DE L'HYPERBOLE

95. On appelle excentricité de l'hyperbole le rapport de la distance entre les foyers de cette hyperbole à la distance entre ses sommets. Si nous désignons par ε l'excentricité de l'hyperbole, nous aurons:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Etant donné que pour l'hyperbole $c > a$, l'excentricité $\varepsilon > 1$. En d'autres termes, l'*excentricité de toute hyperbole est supérieure à* 1.

Vu que $c^2 = a^2 + b^2$,

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

d'où

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \text{et} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Par conséquent, l'excentricité détermine le rapport $\frac{b}{a}$, et le rapport $\frac{b}{a}$ détermine à son tour l'excentricité. Donc, l'*excentricité de l'hyperbole caractérise la forme de son rectangle de base et par suite la forme de l'hyperbole même.*

Le rapport $\frac{b}{a}$ est d'autant plus petit que $\varepsilon^2 - 1$ est petit, c'est-à-dire que l'excentricité est proche de l'unité. En d'autres termes, *plus l'excentricité de l'hyperbole est petite plus son rectangle de base est allongé* (dans le sens de l'axe transverse). Dans le cas d'une hyperbole équilatère $a = b$ et $\varepsilon = \sqrt{2}$.

§ 33. EXPRESSIONS RATIONNELLES DES RAYONS FOCAUX DE L'HYPERBOLE

96. Considérons un point quelconque $M(x; y)$, appartenant à une hyperbole donnée. Si r_1 et r_2 sont les rayons focaux du point considéré, nous avons

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{1}$$

Il se trouve que l'on peut indiquer pour les rayons focaux d'autres formules qui seront des expressions rationnelles.

En effet, en vertu de l'égalité (8), n° 84, nous avons

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm\left(\frac{c}{a}x - a\right).$$

Ici le signe + se rapporte au cas où le point M est situé sur la branche de droite de l'hyperbole. En posant $\frac{c}{a} = \varepsilon$ et prenant en considération la deuxième égalité (1), nous aurons

$$r_2 = \pm(\varepsilon x - a). \tag{2}$$

Pour trouver l'expression du premier rayon focal, nous userons de la relation fondamentale: $r_1 - r_2 = \pm 2a$ où le signe + se rapporte également aux points de la branche droite de l'hyperbole. Il découle de cette relation que $r_1 = r_2 \pm 2a = \pm(\varepsilon x + a)$. Ainsi donc, pour les points de la branche droite de l'hyperbole

$$r_1 = \varepsilon x + a, \qquad r_2 = \varepsilon x - a, \tag{3}$$

alors que pour les points de la branche gauche de l'hyperbole

$$r_1 = -(\varepsilon x + a), \qquad r_2 = -(\varepsilon x - a). \tag{4}$$

Ces formules seront amplement utilisées dans le paragraphe suivant.

§ 34. DIRECTRICES DE L'ELLIPSE ET DE L'HYPERBOLE

97. Considérons une ellipse quelconque et appliquons un système de coordonnées cartésiennes orthogonales de façon que cette ellipse soit déterminée par l'équation canonique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Supposons que l'ellipse considérée ne soit pas un cercle, c'est-à-dire que $a \neq b$, et par conséquent $\varepsilon \neq 0$. Supposons de plus que l'ellipse soit allongée dans le sens de l'axe Ox, autrement dit que $a > b$.

Les deux droites perpendiculaires au grand axe et disposées symétriquement par rapport au centre à une distance de $\frac{a}{\varepsilon}$ *de ce centre sont appelées directrices de l'ellipse.*

Les équations des directrices dans le système de coordonnées choisi sont

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \qquad \text{et} \qquad x = +\frac{a}{\varepsilon}.$$

Nous convenons d'appeler la première directrice directrice gauche et la seconde directrice droite.

Etant donné que pour l'ellipse $\varepsilon < 1$, $\frac{a}{\varepsilon} > a$. Il s'ensuit que la directrice droite est située à droite du sommet droit de l'ellipse, et que la directrice gauche est située à gauche du sommet gauche. L'ellipse avec ses directrices est représentée sur la fig. 59.

98. Considérons une hyperbole quelconque et appliquons un système de coordonnées cartésiennes orthogonales tel que cette hyperbole soit déterminée par l'équation canonique

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On appelle directrices de l'hyperbole deux droites perpendiculaires à l'axe transverse de l'hyperbole et disposées symétriquement par rapport au centre à une distance égale à $\frac{a}{\varepsilon}$ *de celui-ci.*

Les équations des directrices dans le système de coordonnées choisi ont la forme suivante:

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \qquad \text{et} \qquad x = +\frac{a}{\varepsilon}.$$

Nous convenons d'appeler la première directrice gauche et la deuxième directrice droite de l'hyperbole.

Etant donné que pour l'hyperbole $\varepsilon > 1$, $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Il s'ensuit que la directrice droite est située entre le centre et le sommet droit de l'hyperbole de même que la directrice gauche est située entre le centre et le sommet gauche de l'hyperbole. L'hyperbole avec ses directrices est représentée sur la fig. 60.

99. L'importance des directrices de l'ellipse et de l'hyperbole devient évidente à la lumière des deux théorèmes suivants.

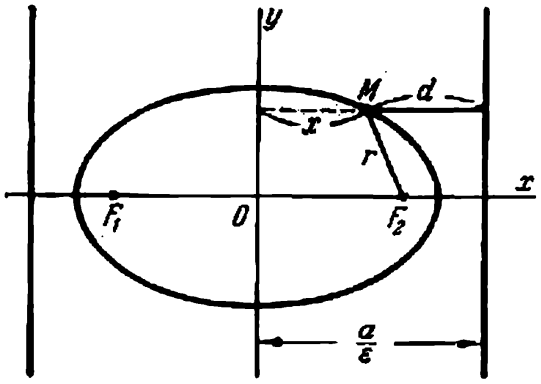


Fig. 59

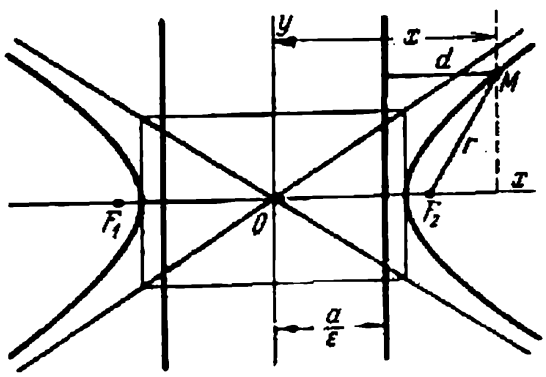


Fig. 60

Théorème 11. *Soient r la distance d'un point quelconque de l'ellipse à un des foyers et d la distance de ce même point à la directrice correspondant à ce foyer. Le rapport* $\frac{r}{d}$ *est alors une constante égale à l'excentricité de l'ellipse*:

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

Démonstration. Supposons pour plus de précision qu'il s'agisse du foyer droit et de la directrice droite. Soit $M(x; y)$ un point quelconque de l'ellipse (voir fig. 59). La distance du point M à la directrice droite s'exprime par l'égalité

$$d = \frac{a}{\varepsilon} - x, \tag{1}$$

ce que l'on vérifie aisément sur la fig. 59. La distance du point M au foyer droit est fournie par la deuxième des formules (2) § 27 :

$$r = a - \varepsilon x. \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) nous donnent :

$$\frac{r}{d} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \frac{(a - \varepsilon x)\,\varepsilon}{a - \varepsilon x} =$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 12. *Soient r la distance d'un point quelconque d'une hyperbole à un des foyers et d la distance du même point à la directrice correspondant à ce foyer. Le rapport* $\frac{r}{d}$ *est alors une constante égale à l'excentricité de l'hyperbole:*

$$\frac{r}{d}=\varepsilon.$$

Démonstration. Supposons, pour éviter toute confusion, qu'il s'agisse du foyer droit et de la directrice droite. Soit $M(x; y)$ un point quelconque de l'hyperbole (voir fig. 60). Nous aurons à considérer deux cas:

1) Le point M est sur la branche droite de l'hyperbole. La distance de ce point M à la directrice droite s'exprime alors par l'égalité

$$d=x-\frac{a}{\varepsilon}, \tag{3}$$

que l'on vérifiera facilement sur la figure. La distance du point M au foyer droit nous sera fournie par la deuxième des formules (3) § 33:

$$r=\varepsilon x-a. \tag{4}$$

Les relations (3) et (4) nous permettent d'obtenir:

$$\frac{r}{d}=\frac{\varepsilon x-a}{x-\frac{a}{\varepsilon}}=\frac{(\varepsilon x-a)\,\varepsilon}{\varepsilon x-a}=\varepsilon.$$

2) Le point M se trouve sur la branche gauche de l'hyperbole. La distance du point M à la directrice droite s'exprime alors par la formule

$$d=|x|+\frac{a}{\varepsilon}$$

($|x|$ est la distance du point M à l'axe Oy, $\frac{a}{\varepsilon}$ la distance de la directrice à l'axe Oy, d la somme de ces deux distances). Mais comme M est situé sur la branche gauche de l'hyperbole, x est une grandeur négative et par conséquent $|x| = -x$ et il vient

$$d=-x+\frac{a}{\varepsilon}. \tag{5}$$

La distance du point M au foyer droit est fournie par la deuxième des formules (4) § 33:

$$r=-(\varepsilon x-a). \tag{6}$$

A partir des relations (5) et (6) nous aurons:

$$\frac{r}{d}=\frac{-(\varepsilon x-a)}{-x+\frac{a}{\varepsilon}}=\frac{(-\varepsilon x+a)\,\varepsilon}{-\varepsilon x+a}=\varepsilon.$$

Ce qui démontre le théorème.

100. Les propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole exprimées dans les théorèmes que nous venons de démontrer peuvent servir à définir ces courbes. Ces définitions prendront la forme suivante: *le lieu géométrique des points dont le rapport des distances r à un certain point fixe (foyer) et d à une certaine droite fixe (directrice) est une valeur constante*

$$\frac{r}{d} = \varepsilon \quad (\varepsilon = \text{const})$$

est une ellipse si $\varepsilon < 1$ *et une hyperbole si* $\varepsilon > 1$. (Pour vérifier la justesse de cette assertion, il convient de déduire l'équation du lieu géométrique indiqué et d'établir que l'équation obtenue est l'équation de l'ellipse pour $\varepsilon < 1$ et celle de l'hyperbole pour $\varepsilon > 1$.)

Une question qui se pose d'elle-même est de savoir quel est le lieu géométrique des points déterminés de la même façon mais pour lesquels $\varepsilon = 1$, autrement dit le lieu géométrique des points pour lesquels $r = d$. Nous verrons que c'est une courbe du second degré, nouvelle pour nous, et qui est appelée parabole.

§ 35. LA PARABOLE. ÉTABLISSEMENT DE L'ÉQUATION CANONIQUE DE LA PARABOLE

101. *On appelle parabole le lieu géométrique des points dont la distance à un certain point fixe du plan, appelé foyer, est égale à la distance à une droite fixe, appelée directrice* (sous réserve que cette droite ne passe pas par le foyer).

On désigne habituellement le foyer de la parabole par F, la distance du foyer à la directrice par p. On appelle la grandeur p *paramètre* de la parabole. Le tracé d'une parabole est présenté sur la fig. 61 (le lecteur obtiendra des données détaillées sur cette figure dans les paragraphes suivants).

Remarque. En vertu de ce qui a été exposé au n° 100, l'excentricité de la parabole $\varepsilon = 1$.

102. Soit une parabole quelconque (nous considérons comme donné le paramètre p). Introduisons dans le plan un système de coordonnées cartésiennes orthogonales dont les axes seront disposés de la façon suivante: l'axe des abscisses passera par le foyer perpendiculairement à la directrice et nous le considérerons comme orienté de la directrice vers le foyer. L'origine des coordonnées sera située à égale distance du foyer et de la directrice (fig. 61). Etablissons l'équation de cette parabole dans le système de coordonnées ainsi défini.

Prenons sur le plan un point quelconque $M(x; y)$. Désignons par r la distance de ce point M au foyer ($r = FM$), par d la distance du point M à la directrice. Le point M appartiendra à la parabole

(donnée) si et seulement si

$$r = d. \tag{1}$$

Pour obtenir l'équation cherchée, nous devons substituer dans (1) aux variables r et d leurs expressions formulées à l'aide des coordonnées courantes x et y. Remarquons que les coordonnées du foyer

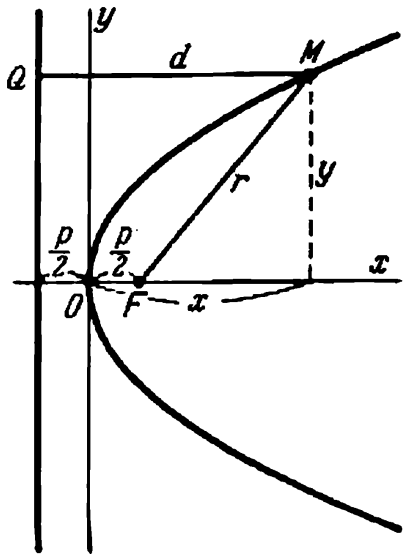


Fig. 61

sont $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$. Appliquons la formule (2) du n° 18 et prenant ce dernier fait en considération, nous aurons:

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}. \tag{2}$$

Désignons par Q le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur la directrice. Il est évident que le point Q a pour coordonnées $\left(-\frac{p}{2}; y\right)$. D'où et en vertu de (2), n° 18:

$$d = MQ = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = x + \frac{p}{2} \tag{3}$$

(lors de l'extraction de la racine nous avons pris $x + \frac{p}{2}$ avec son signe car $x + \frac{p}{2}$ est un nombre positif: cela découle du fait que le point M $(x;\ y)$ doit se trouver du même côté de la directrice que le foyer, autrement dit nous devons avoir $x > -\frac{p}{2}$, d'où $x + \frac{p}{2} > 0$).

En remplaçant dans l'égalité (1) r et d par leurs expressions (2) et (3), nous obtenons:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}. \tag{4}$$

C'est précisément l'équation de la parabole considérée dans le système de coordonnées choisi, car les coordonnées du point $M(x; y)$ lui satisfont si et seulement si le point M appartient à la parabole considérée.

Pour simplifier cette formule, nous élèverons au carré les deux membres de cette équation (4). On aura:

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}, \tag{5}$$

ou encore

$$y^2=2px. \tag{6}$$

Nous avons déduit l'équation (6) comme corollaire de l'équation (4). Il est facile de montrer que l'équation (4), à son tour, découle de l'équation (6). En effet, il est évident que (5) et (6) sont équivalentes. L'équation (5) nous donne:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\pm\left(x+\frac{p}{2}\right).$$

Il nous reste à montrer que si x et y satisfont à l'équation (6), on ne peut choisir ici que le signe $+$. Or, c'est évident, puisque nous déduisons de l'équation (6) $x=\frac{y^2}{2p}$. Par conséquent, $x\geqslant 0$, et c'est pourquoi $x+\frac{p}{2}$ est un nombre positif. Nous revenons à l'équation (4). Etant donné que les équations (4) et (6) se déduisent l'une de l'autre, elles sont équivalentes. Nous pouvons donc conclure que l'équation (6) est l'équation de la parabole. Cette formule est dite *équation canonique de la parabole.*

103. L'équation $y^2=2px$, déterminant la parabole dans un certain système de coordonnées cartésiennes orthogonales, est une équation du second degré. Par conséquent, *la parabole est une courbe du second degré.*

§ 36. DISCUSSION DE LA FORME DE LA PARABOLE

104. Essayons en analysant l'équation

$$y^2=2px \tag{1}$$

de préciser la forme de la parabole et de montrer ainsi que le tracé de cette courbe représenté sur la fig. 61 est juste.

Etant donné que l'équation (1) ne comprend qu'une puissance paire de y, la parabole que cette équation détermine est symétrique par rapport à l'axe Ox. Il nous suffit donc d'étudier la portion de cette courbe située dans le demi-plan supérieur. Cette portion de la parabole est déterminée par l'équation

$$y = +\sqrt{2px}. \qquad (2)$$

Pour les valeurs négatives de x dans l'équation (2) y est imaginaire. Par conséquent, il n'y a pas un seul point de la parabole à gauche de l'axe Oy. Pour $x = 0$ nous avons $y = 0$. L'origine des coordonnées appartient donc à la parabole et est son point extrême à

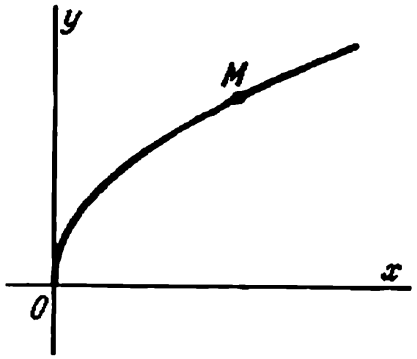


Fig. 62

gauche. Faisons croître x à partir de 0. L'équation (2) indique que quand x croît, y croît aussi constamment. L'équation (2) indique également que si $x \to \infty$, nous aurons également $y \to \infty$.

Par conséquent, le point M $(x; y)$, qui décrit la portion de parabole considérée, part de l'origine des coordonnées et se déplace vers le « haut » et vers la « droite ». Son éloignement tant de l'axe Oy vers la « droite » que de l'axe Ox vers le « haut » est infini (fig. 62).

Remarque. Deux autres propriétés de la parabole sont à retenir: 1) sa tangente au point O (0; 0) est perpendiculaire à l'axe Ox, 2) la portion de parabole située dans le demi-plan supérieur a une convexité tournée vers le haut. Le graphique de la fig. 62 est tracé en tenant compte de ces propriétés. Nous ne démontrons toutefois pas ces propriétés, car il est plus indiqué d'user à cet effet des méthodes de l'analyse mathématique.

105. Maintenant que nous avons déterminé la forme de la portion de parabole située dans le demi-plan supérieur, rien n'est plus facile que d'établir la forme de la parabole tout entière. Il suffit pour cela d'effectuer un rabattement symétrique par rapport à l'axe Ox. Le graphique de la fig. 61 donne une idée générale de la parabole entière déterminée par l'équation

$$y^2 = 2px.$$

On appelle communément l'axe de symétrie de la parabole son *axe* tout court (dans le cas que nous avons examiné il coïncidait avec l'axe Ox). Le point où l'axe coupe la parabole est appelé son *sommet* (dans le cas présent le sommet coïncide avec l'origine des coordonnées). Le nombre p, autrement dit le paramètre de la parabole, exprime la distance du foyer à la directrice. Le sens géométrique du paramètre p peut être décrit de la façon suivante. Prenons une valeur quelconque déterminée de l'abscisse, $x = 1$ par exemple,

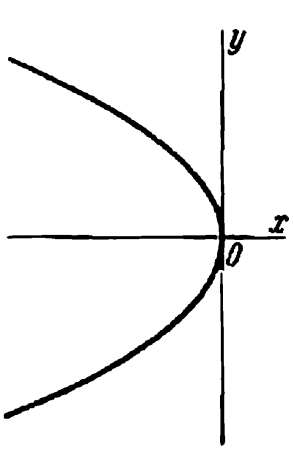


Fig. 63

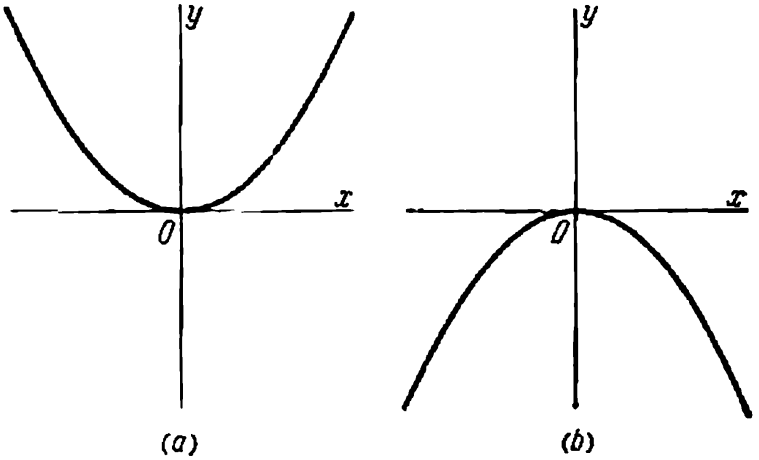


Fig. 64

et trouvons à partir de l'équation (1) la valeur correspondante de l'ordonnée $y = \pm \sqrt{2p}$. Nous obtenons sur la parabole deux points $M_1 (1 ; +\sqrt{2p})$ et $M_2 (1 ; -\sqrt{2p})$ symétriques par rapport à l'axe de la parabole; la distance entre ces points est égale à $2\sqrt{2p}$. Par conséquent, $2\sqrt{2p}$ est la longueur de la corde de la parabole tracée perpendiculairement à l'axe et le coupant à une distance de l'origine égale à 1. Nous voyons que la longueur de cette corde ($=2\sqrt{2p}$) est d'autant plus grande que p est plus grand. Par conséquent, le paramètre p caractérise la « largeur » du domaine limité par la parabole, à condition que cette « largeur » soit mesurée perpendiculairement à l'axe de la parabole à une distance déterminée du sommet.

106. L'équation

$$y^2 = -2px \tag{3}$$

(p étant positif) se réduit à l'équation $y^2 = 2px$ en remplaçant x par $-x$, autrement dit par transformation des coordonnées consistant à inverser l'orientation de l'axe Ox. Il en découle que l'équation $y^2 = -2px$ détermine également une parabole dont l'axe coïncide avec l'axe Ox et le sommet avec l'origine des coordonnées, mais disposée dans le demi-plan gauche (comme indiqué sur la fig. 63).

107. Par analogie avec ce qui vient d'être exposé, nous pouvons affirmer que chacune des équations

$$x^2 = 2py, \qquad x^2 = -2py$$

($p > 0$) détermine une parabole ayant comme sommet l'origine des coordonnées et disposée symétriquement par rapport à l'axe Oy (ces équations de paraboles, de même que les équations (1) et (3), sont dites équations canoniques). Nous appellerons une parabole déterminée par l'équation $x^2 = 2py$ parabole *ascendante* et celle que détermine l'équation $x^2 = -2py$ parabole *descendante* (voir respectivement fig. 64,*a* et *b*). Ces dénominations sont naturelles et n'exigent pas d'explications.

§ 37. ÉQUATIONS POLAIRES DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE ET DE LA PARABOLE

108. Utilisant les résultats exposés aux n^{os} 99-102, nous allons introduire l'*équation polaire de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole* (dont la forme est la même pour les trois courbes), *l'axe polaire occupant une position particulière*. Faisons toutefois cette restriction que pour l'hyperbole cette équation détermine non pas la courbe en son entier, mais une seule de ses branches.

Soit l'une quelconque des courbes que nous venons d'indiquer: ellipse, hyperbole ou parabole (s'il s'agit d'une hyperbole nous ne considérerons qu'une seule de ses branches). Désignons cette courbe par la lettre L.

Soient F le foyer de la courbe, g la directrice correspondant à ce foyer (dans le cas de l'hyperbole nous choisirons le foyer et la directrice les plus proches de la branche considérée).

Introduisons un système de coordonnées polaires de façon que le pôle coïncide avec le foyer F, l'axe polaire étant orienté suivant l'axe de la courbe L dans la direction opposée à la directrice g (fig. 65). Désignons comme d'habitude par ρ et θ les coordonnées polaires d'un point quelconque M appartenant à la ligne L. Pour obtenir l'équation de la ligne L nous nous baserons sur la relation

$$\frac{r}{d} = \varepsilon, \tag{1}$$

où ε est l'excentricité de la courbe et r et d ont le même sens que dans les n^{os} 99-102.

Etant donné que le pôle se confond avec le foyer F, il vient

$$r = \rho. \tag{2}$$

Nous avons ensuite

$$d = QM = DN = DF + FN = DF + \rho\cos\theta. \tag{3}$$

Soit P un point situé sur la courbe L de telle façon que le segment FP soit perpendiculaire à l'axe de la ligne L et soit p la longueur du segment FP. Autrement dit, *p est la moitié de la corde focale de la courbe L, perpendiculaire à son axe*; cette grandeur p est appelée *paramètre focal* de la courbe L *.

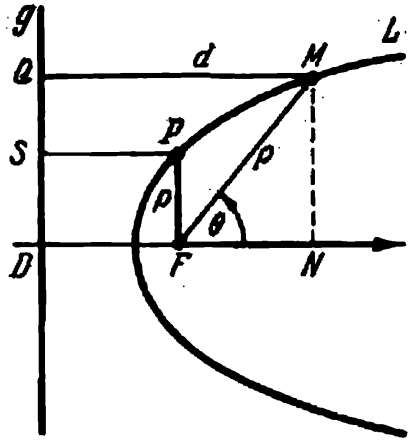


Fig. 65

En raison de la relation fondamentale (1), qui se rapporte à tous les points de la courbe L, nous aurons (notamment pour le point P)

$$\frac{FP}{SP} = \varepsilon,$$

d'où $SP = \frac{FP}{\varepsilon} = \frac{p}{\varepsilon}$. Mais $SP = DF$; par conséquent,

$$DF = \frac{p}{\varepsilon}.$$

Il découle de la dernière égalité et de l'égalité (3):

$$d = \frac{p}{\varepsilon} + \rho \cos\theta. \tag{4}$$

Si nous remplaçons à présent dans le premier membre de l'équation (1) r et d par leurs expressions (2) et (4), nous trouvons

$$\frac{\rho}{\frac{p}{\varepsilon} + \rho\cos\theta} = \varepsilon,$$

d'où

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\theta}. \tag{5}$$

* Dans le cas où la courbe L est une parabole, $FP = PS$ (voir n° 101), par conséquent $p = DF$, autrement dit p est égal à la distance du foyer à la directrice. Ainsi donc, dans ce cas, la grandeur p coïncide avec le paramètre de la parabole que nous avons déjà vu plus tôt et désigné par la même lettre.

C'est précisément l'équation polaire de l'ellipse, de l'hyperbole (ou plus exactement d'une de ses branches) et de la parabole. Ici p est le paramètre focal, ε l'excentricité de la courbe. L'équation (5) est utilisée en mécanique.

§ 38. DIAMÈTRES DES COURBES DU SECOND DEGRÉ

109. Le théorème suivant exprime une propriété importante et inattendue à première vue des courbes du second degré (ellipse, hyperbole et parabole).

Théorème 13. *Les milieux des cordes parallèles d'une courbe du second degré sont situés sur une même droite.*

Démonstration. 1) Supposons que la courbe donnée soit une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

Désignons par k le coefficient angulaire commun des cordes parallèles. L'équation de chacune d'elles peut être alors notée sous la forme suivante :

$$y=kx+l; \tag{2}$$

où l a des valeurs différentes pour les différentes cordes.

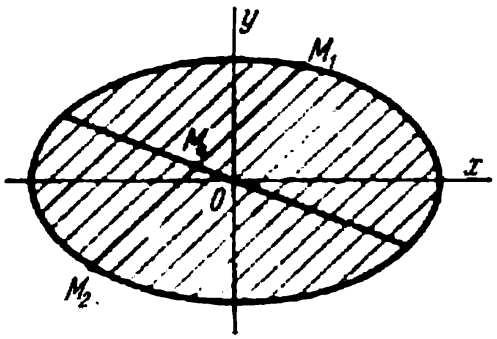


Fig. 66

Cherchons les extrémités de la corde déterminée par l'équation (2) pour une valeur quelconque de l. La solution du système composé des équations (1) et (2) nous donne, en excluant y :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx+l)^2}{b^2}=1,$$

ou encore

$$(b^2+a^2k^2)\,x^2+2a^2klx+a^2\,(l^2-b^2)=0. \tag{3}$$

Les racines x_1 et x_2 de cette équation du second degré sont les abscisses des extrémités M_1 et M_2 de la corde. Soit $M_0\,(x_0;\ y_0)$ le milieu de cette corde. Alors

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Or, en vertu du théorème sur la somme des racines de l'équation du second degré

$$x_1+x_2=-\frac{2a^2kl}{b^2+a^2k^2}.$$

Par conséquent,

$$x_0 = -\frac{a^2kl}{b^2+a^2k^2}.$$

Connaissant x_0, nous trouverons y_0 à partir de l'équation (2) :

$$y_0 = kx_0 + l = -\frac{a^2k^2l}{b^2+a^2k^2} + l = \frac{b^2l}{b^2+a^2k^2}.$$

Ainsi donc

$$x_0 = -\frac{a^2kl}{b^2+a^2k^2}, \qquad y_0 = \frac{b^2l}{b^2+a^2k^2}. \tag{4}$$

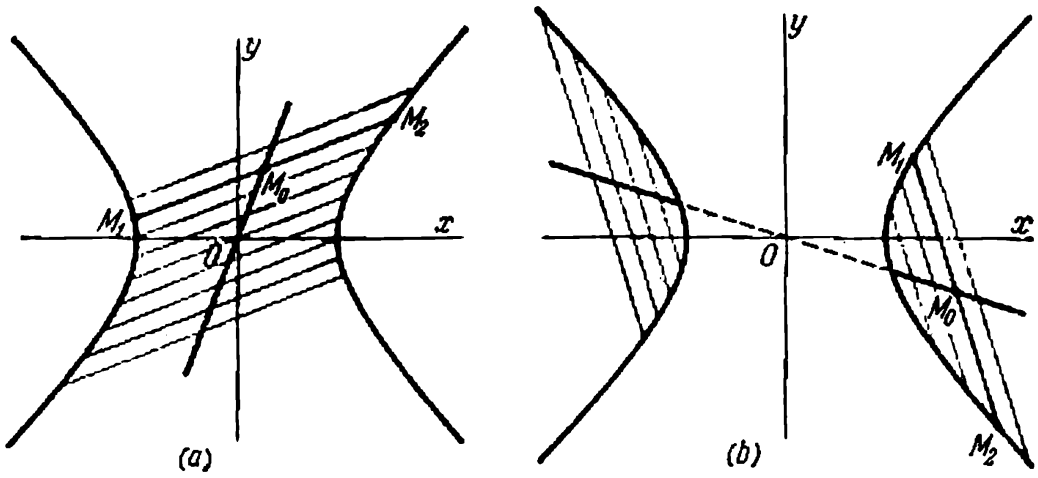


Fig. 67

En faisant varier l, nous obtiendrons les coordonnées des milieux des différentes cordes de l'ellipse parallèles entre elles. Les relations (4) indiquent que x_0, y_0 seront invariablement liés par l'équation

$$\frac{y_0}{x_0} = -\frac{b^2}{a^2k},$$

ou encore $y_0 = k'x_0$ où

$$k' = -\frac{b^2}{a^2k}. \tag{5}$$

Les milieux des cordes se trouvent donc sur la droite

$$y = k'x. \tag{6}$$

2) Supposons à présent que la courbe donnée soit une hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7}$$

(fig. 67, *a* et *b*). Désignons par k le coefficient angulaire commun des cordes parallèles. L'équation de chacune de ces cordes peut être posée comme suit

$$y = kx + l. \tag{8}$$

Remarquons tout d'abord que les cordes de l'hyperbole ne peuvent être parallèles à ses asymptotes (car toute droite parallèle à l'asymptote ne

coupe l'hyperbole qu'en un seul point). C'est pourquoi $k \neq \frac{b}{a}$ et $k \neq -\frac{b}{a}$. Cherchons les extrémités de la corde déterminée par l'équation (8) pour une valeur quelconque de l. En résolvant le système composé des équations (7) et (8) et en éliminant y nous obtenons :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(kx+l)^2}{b^2} = 1,$$

ou encore

$$(b^2 - a^2k^2)\, x^2 - 2a^2klx - a^2(l^2 + b^2) = 0. \tag{9}$$

Etant donné que $k \neq \pm \frac{b}{a}$, $b^2 - a^2k^2 \neq 0$. Par conséquent, l'équation (9) est une équation du second degré. Les racines de cette équation x_1 et x_2 sont les abscisses des extrémités M_1 et M_2 de la corde. Soit $M_0(x_0; y_0)$ le milieu de cette même corde. On a

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

En appliquant le théorème sur la somme des racines d'une équation du second degré, nous aurons :

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2kl}{b^2 - a^2k^2}.$$

Par conséquent, $x_0 = \frac{a^2kl}{b^2 - a^2k^2}$. Connaissant x_0, nous obtiendrons y_0 à partir de l'équation (8) :

$$y_0 = kx_0 + l = \frac{a^2k^2l}{b^2 - a^2k^2} + l = \frac{b^2l}{b^2 - a^2k^2}.$$

Ainsi donc,

$$x_0 = \frac{a^2kl}{b^2 - a^2k^2}, \qquad y_0 = \frac{b^2l}{b^2 - a^2k^2}. \tag{10}$$

En faisant varier l, nous obtiendrons les coordonnées des milieux des différentes cordes de l'hyperbole parallèles entre elles, la relation (10) indiquant que x_0 et y_0 seront constamment liés par l'équation

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{b^2}{a^2k},$$

ou encore $y_0 = k'x_0$ où

$$k' = \frac{b^2}{a^2k}. \tag{11}$$

Par conséquent, les milieux de toutes les cordes parallèles sont situés sur la même droite

$$y = k'x. \tag{12}$$

3) Supposons enfin que la courbe indiquée soit une p a r a b o l e

$$y^2 = 2px \tag{13}$$

(fig. 68). Désignons par k le coefficient angulaire commun des cordes parallèles. L'équation de chacune de ces cordes peut être alors posée comme suit

$$y = kx + l. \tag{14}$$

Remarquons tout d'abord que les cordes de la parabole ne peuvent être parallèles à son axe (car toute droite parallèle à l'axe ne coupe la parabole qu'en un seul point) ; donc $k \neq 0$.

Cherchons les extrémités de la corde déterminée par l'équation (14) pour une valeur quelconque de l. Résolvons le système composé des équations (13) et (14) et éliminons y. Nous aurons :

$$(kx+l)^2-2px=0,$$

ou encore

$$k^2x^2+2(kl-p)x+l^2=0. \tag{15}$$

Etant donné que $k\neq 0$, l'équation (15) est une équation du second degré. Les racines de cette équation sont les abscisses des extrémités M_1

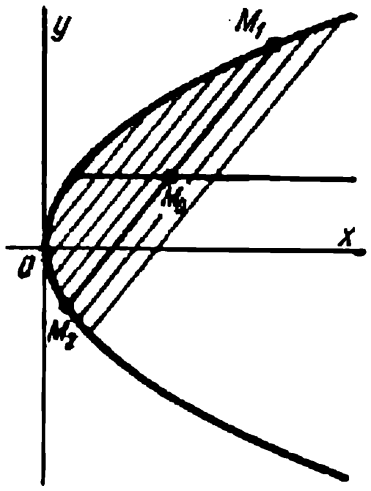


Fig. 68

et M_2 de la corde. Soit $M_0(x_0; y_0)$ le milieu de cette même corde. On a

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2};$$

en vertu du théorème sur la somme des racines de l'équation du second degré :

$$x_1+x_2=-\frac{2(kl-p)}{k^2}.$$

Par conséquent, $x_0=\frac{p-kl}{k^2}$. Connaissant x_0, nous trouverons y_0 à partir de l'équation (14) :

$$y_0=kx_0+l=k\frac{p-kl}{k^2}+l=\frac{p}{k}.$$

Ainsi donc,

$$x_0=\frac{p-kl}{k^2}, \qquad y_0=\frac{p}{k}. \tag{16}$$

En faisant varier l dans cette expression, nous obtiendrons les coordonnées du milieu des cordes parallèles entre elles de la parabole. On voit en même temps à l'aide de la relation (16) que y_0 restera constamment égal au nombre $\frac{p}{k}$. Par conséquent, les milieux des cordes sont situés sur la droite

$$y=\frac{p}{k}, \tag{17}$$

parallèle à l'axe des abscisses et en même temps parallèle à l'axe de la parabole.

Nous pourrions dire maintenant que le théorème est démontré entièrement s'il n'y avait un défaut dans la technique de nos calculs. En effet, nous avons présenté les cordes des courbes du deuxième ordre à l'aide d'équations (de forme $y = kx + l$), ayant un coefficient angulaire. Nos calculs deviennent par conséquent vides de sens si les droites considérées sont parallèles à l'axe Oy (car les droites parallèles à l'axe Oy n'ont pas de coefficient angulaire). Toutefois pour de telles cordes le sens du théorème résulte directement des propriétés de symétrie de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole. En effet, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole déterminées par les équations (1), (7) et (13) sont symétriques par rapport à l'axe Ox. Par conséquent, même dans le cas où les cordes sont parallèles à l'axe Oy, leurs milieux sont situés sur la même droite (l'axe Ox).

110. *La droite traversant en leur milieu les cordes parallèles d'une courbe du second degré est appelée diamètre de cette courbe.*

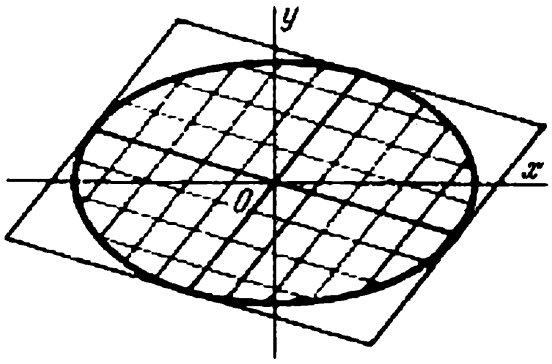


Fig. 69

Tous les diamètres de l'ellipse et de l'hyperbole passent par leur centre, ce qui est évident géométriquement parlant (car le centre est le milieu de toute corde passant par ce centre) et ce qui découle également des équations (6) et (12) du n° 109.

En vertu de l'équation (17) *tous les diamètres de la parabole sont parallèles à son axe.*

Notons encore quelques propriétés des diamètres de l'ellipse et de l'hyperbole.

Considérons l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Soit k le coefficient angulaire de l'un quelconque de ses diamètres. Traçons parallèlement à ce diamètre des cordes de l'ellipse. Le lieu géométrique de leurs milieux est un autre diamètre, dit *conjugué* au premier. Le coefficient angulaire de ce second diamètre k' est déterminé par l'égalité (5) ou

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2}. \qquad (18)$$

Cherchons à présent le diamètre conjugué au diamètre dont le coefficient angulaire est k'. Analogiquement à ce qui vient d'être exposé, le coefficient angulaire k'' de ce nouveau diamètre sera déterminé par l'égalité

$$k'k'' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

D'où et en vertu de (18) nous avons $k'' = k$.

Par conséquent, *si l'un des diamètres de l'ellipse est conjugué à un deuxième ce dernier est conjugué au premier.* C'est pourquoi on appelle ces diamètres *réci-*

proquement conjugués ou simplement *conjugués*. La relation (18) est appelée condition pour que deux diamètres de coefficients angulaires k et k' soient conjugués.

On peut exprimer comme suit le fait que deux diamètres sont conjugués réciproquement: *si l'un des deux diamètres de l'ellipse coupe en leur milieu les cordes parallèles au second, ce dernier coupe en leur milieu les cordes parallèles au premier* (voir fig. 69 ; ce graphique illustre également un corollaire intéressant de la proposition ci-dessus: les tangentes à une ellipse aux extrémités d'un de ses diamètres sont parallèles entre elles et parallèles au diamètre conjugué).

Tout ce qui vient d'être dit au sujet des diamètres de l'ellipse s'étend directement aux diamètres de l'hyperbole. La seule restriction est que la formule exprimant la condition pour laquelle les diamètres de l'hyperbole seront conjugués est quelque peu différente de la relation (18). Précisons. Si l'hyperbole est déterminée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

la condition à laquelle ses diamètres de coefficients angulaires k et k' seront conjugués est

$$kk'=\frac{b^2}{a^2}. \qquad (19)$$

Cette relation découle de l'égalité (11).

Remarque. Les axes de symétrie de l'ellipse et de l'hyperbole sont des diamètres conjugués, car chacun d'eux coupe en leur milieu les cordes parallèles au deuxième axe. Les axes de symétrie se distinguent des autres diamètres du fait que ce sont des diamètres qui sont non seulement conjugués mais aussi perpendiculaires entre eux.

§ 39. PROPRIÉTÉS OPTIQUES DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE ET DE LA PARABOLE

111. Les propriétés optiques sont parmi les propriétés les plus remarquables de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole. Ces propriétés montrent notamment que c'est dans la physique qu'il faut chercher l'origine de la dénomination des foyers.

Formulons-les tout d'abord d'un point de vue purement géométrique.

1. La tangente à l'ellipse en un point M forme des angles égaux avec les rayons focaux F_1M et F_2M et passe en dehors de l'angle F_1MF_2 (fig. 70,*a*).

2. La tangente à la parabole en un point M forme des angles égaux avec le rayon focal FM et avec la demi-droite issue du point M et parallèle à l'axe de la parabole dans la direction où la parabole s'étend à l'infini (fig. 70,*b*).

3. La tangente à l'hyperbole en un point M forme des angles égaux avec les rayons focaux F_1M et F_2M et passe à l'intérieur de l'angle F_1MF_2 (fig. 70,*c*).

Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ces propriétés. Bornons-nous à remarquer que pour les démontrer par le calcul il faut savoir exprimer le coefficient angulaire de la tangente connaissant l'équation de la courbe et le point de contact. Les règles adéquates sont fournies par l'analyse mathématique. Pour rendre évident le sens physique des propriétés énoncées, imaginons que l'ellipse, l'hyperbole et la parabole tournent autour de l'axe sur lequel sont placés les foyers. Elles engendrent ainsi des surfaces dites respectivement ellipsoïde, hyperboloïde et paraboloïde de révolution. Une surface réelle de ce genre, amalgamée, représente respectivement un miroir elliptique, hyperbolique et parabolique. Compte tenu des lois de la réflexion de la lumière que nous fournit l'optique, nous pouvons conclure que :

1. Si la source lumineuse se trouve à l'un des foyers d'un miroir elliptique, les rayons lumineux réfléchis convergent à l'autre foyer.

2. Si la source lumineuse se trouve au foyer d'un miroir parabolique, les rayons réfléchis par le miroir se dirigent parallèlement à l'axe.

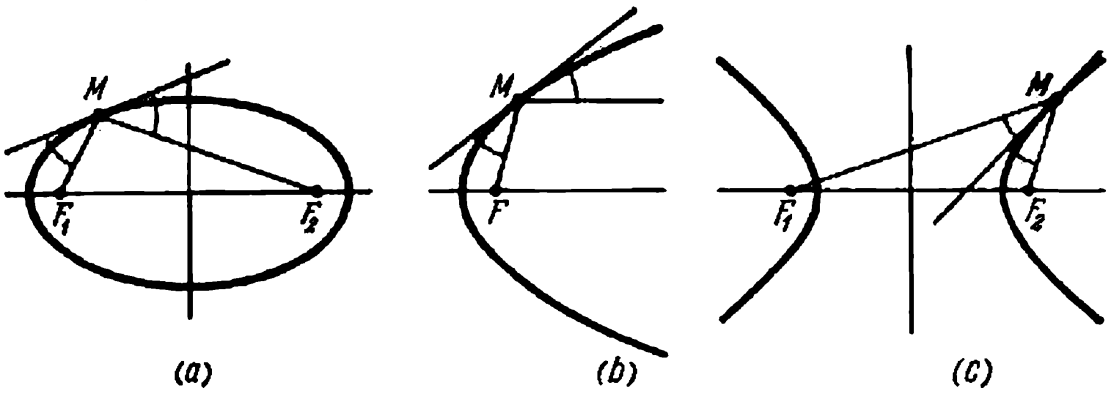


Fig. 70

3. Si la source lumineuse se trouve à l'un des foyers d'un miroir hyperbolique, ses rayons réfléchis par le miroir poursuivront leur chemin de la même manière que s'ils étaient issus du deuxième foyer.

C'est sur la propriété des miroirs paraboliques que nous venons d'indiquer qu'est basé le principe des projecteurs.

§ 40. L'ELLIPSE, L'HYPERBOLE ET LA PARABOLE EN TANT QUE SECTIONS CONIQUES

112. Le théorème suivant jette une lumière nouvelle sur la nature géométrique des ellipses, des hyperboles et des paraboles.

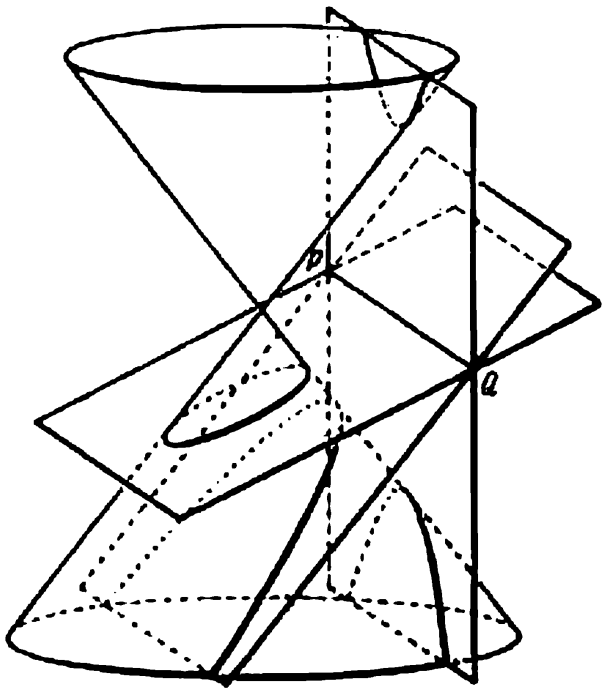


Fig. 71

Théorème 14. *La section d'un cône de révolution par un plan qui ne passe pas par le sommet de cône est une ellipse, une parabole ou une hyperbole. Si*

le plan ne coupe le cône qu'une fois suivant une courbe fermée, cette courbe est une ellipse. Si le plan ne coupe qu'une fois le cône suivant une courbe non fermée, cette courbe est une parabole. Si le plan coupe le cône deux fois, la courbe obtenue est une hyperbole (fig. 71).

La justesse de ce théorème découle de certaines considérations qui seront exposées plus bas (voir n° 264).

Il est facile de voir sur la fig. 71 qu'en faisant tourner le plan sécant autour de la droite *PQ* nous ferons varier la forme de la section. Etant initialement une ellipse, par exemple, elle deviendra pour un instant une parabole pour se transformer ensuite en hyperbole. Elle sera une parabole lorsque le plan sécant sera parallèle à un plan tangent à la surface du cône.

Conformément à ce qui vient d'être exposé dans ce paragraphe, on appelle l'ellipse, l'hyperbole et la parabole *sections coniques* ou simplement *coniques*.

CHAPITRE VI

SIMPLIFICATION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE D'UNE COURBE DU SECOND DEGRÉ

§ 41. NOTATION STANDARD DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ

113. La tâche principale que nous nous proposerons dans les paragraphes suivants sera la simplification de l'équation générale du second degré

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

et la définition du même coup de toutes les variétés de courbes du second degré. La simplification de l'équation générale du second degré est obtenue par une transformation adéquate du système de coordonnées. Nous montrerons qu'en adoptant de nouvelles coordonnées nous pourrons réduire toute équation du second degré à une forme ne contenant pas plus de trois monômes dans le membre gauche.

Avant d'aborder la solution du problème ainsi posé, nous ferons une remarque de caractère purement technique. Dans la plupart des formules de la théorie des courbes du second degré les coefficients B, D et E se trouvent divisés par 2. Aussi sera-t-il plus commode d'inscrire comme suit l'équation générale du second degré :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Autrement dit, nous désignerons par les lettres B, D et E la moitié des coefficients correspondants. Par exemple, si nous avons l'équation

$$x^2 + 3xy + 2y^2 + 5x + 4y + 1 = 0,$$

nous entendrons que

$$A = 1, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = 2, \quad D = \frac{5}{2}, \quad E = 2, \quad F = 1.$$

Nous n'userons dorénavant que de l'écriture (1) de l'équation générale du second degré. Nous appellerons les nombres A, B, C, D, E, F coefficients de l'équation (1) (pour les lettres B, D et E nous savons que cette dénomination est conventionnelle).

§ 42. SIMPLIFICATION DE L'ÉQUATION D'UNE COURBE DU SECOND DEGRÉ PAR TRANSFERT DE L'ORIGINE DES COORDONNÉES AU CENTRE

114. Soit l'équation d'une courbe du second degré

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Voyons tout d'abord comment se transforme cette équation lors d'une translation parallèle des axes. Supposons que les axes de coordonnées soient déplacés parallèlement à eux-mêmes de façon que l'origine des coordonnées se trouve au point $S\ (x_0\,;\ y_0)$. Désignons par x et y les anciennes coordonnées d'un point quelconque du plan et par $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ les nouvelles coordonnées du même point. Nous aurons alors (voir n° 27).

$$x = \tilde{x} + x_0, \qquad y = \tilde{y} + y_0. \qquad (2)$$

En substituant aux anciennes coordonnées de l'équation (1) les expressions obtenues les exprimant à l'aide des nouvelles coordonnées, nous aurons :

$$\begin{aligned} &Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = \\ &= A(\tilde{x} + x_0)^2 + 2B\,(\tilde{x} + x_0)\,(\tilde{y} + y_0) + C\,(\tilde{y} + y_0)^2 + \\ &+ 2D\,(\tilde{x} + x_0) + 2E\,(\tilde{y} + y_0) + F = \\ &= A\tilde{x}^2 + 2B\tilde{x}\tilde{y} + C\tilde{y}^2 + 2\,(Ax_0 + By_0 + D)\,\tilde{x} + 2\,(Bx_0 + Cy_0 + E)\,\tilde{y} + \\ &+ (Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F). \end{aligned}$$

Nous voyons que dans le nouveau système de coordonnées *les coefficients des termes du second degré restent inchangés*. Par contre, les coefficients des termes du premier degré et le terme constant changent. Introduisons les désignations suivantes :

$$\tilde{D} = Ax_0 + By_0 + D, \qquad (3)$$

$$\tilde{E} = Bx_0 + Cy_0 + E, \qquad (4)$$

$$\tilde{F} = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F. \qquad (5)$$

L'équation de la courbe considérée se ramènera à la forme suivante :

$$A\tilde{x}^2 + 2B\tilde{x}\tilde{y} + C\tilde{y}^2 + 2\tilde{D}\tilde{x} + 2\tilde{E}\tilde{y} + \tilde{F} = 0. \qquad (6)$$

115. Essayons de choisir le point S de façon que dans l'équation transformée les termes comprenant les coordonnées courantes au premier degré soient éliminés, autrement dit de façon que $\tilde{D} = 0$, $\tilde{E} = 0$. Il faut pour cela que les anciennes coordonnées du point S

satisfassent au système de deux équations:

$$\left.\begin{aligned} Ax_0+By_0+D=0,\\ Bx_0+Cy_0+E=0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Nous trouverons le point S si le système (7) est compatible, autrement dit si ce système a une solution. Après transfert de l'origine des coordonnées au point S, l'équation de la courbe considérée prend la forme:

$$A\tilde{x}^2+2B\tilde{x}\tilde{y}+C\tilde{y}^2+\tilde{F}=0. \tag{8}$$

116. Remarquons à présent que de l'équation (8) découle l'égalité

$$A(-\tilde{x})^2+2B(-\tilde{x})(-\tilde{y})+C(-\tilde{y})^2+\tilde{F}=0.$$

Par conséquent, si un point $M(\tilde{x};\ \tilde{y})$ appartient à la courbe considérée, le point $N(-\tilde{x};\ -\tilde{y})$ appartient également à cette courbe

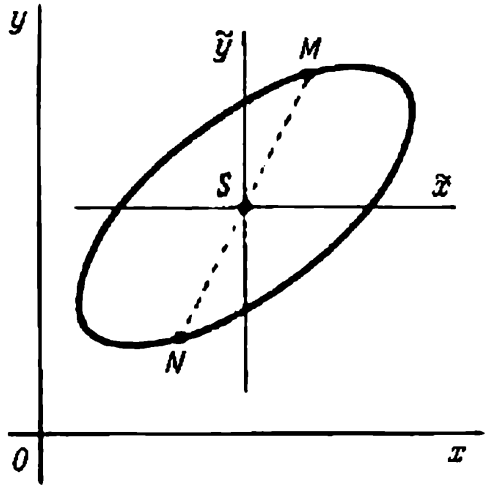


Fig. 72

(voir fig. 72 où la courbe est représentée sous forme d'une ellipse). Nous voyons que les points de la ligne considérée sont disposés par paires symétriques par rapport à la nouvelle origine des coordonnées, c'est-à-dire par rapport au point S.

S'il existe dans le plan un point par rapport auquel tous les points de cette courbe sont disposés par paires symétriques, ce point est appelé centre de la courbe.

Par conséquent, *le sens géométrique de la transformation des coordonnées à la suite de laquelle l'équation d'une courbe du second degré se ramène à la forme* (8) *consiste en ce que l'origine des coordonnées vient coïncider avec le centre de cette courbe.*

117. Conformément à ce qui vient d'être exposé, les solutions $(x_0,\ y_0)$ du système (7) déterminent le centre de la cour-

b e d o n n é e (dans le système initial de coordonnées). C'est pourquoi on appelle les équations (7) *équations du centre.*

La réciproque est vraie: si un point quelconque est le centre d'une courbe du second degré, les coordonnées de ce point constituent la solution du système (7).

Nous ne démontrerons pas cette réciproque, car elle n'est pas nécessaire pour la question qui nous intéresse. Nous devons, en effet, choisir la position de la nouvelle origine des coordonnées de façon que l'équation (1) se ramène à la forme (8). Ce but est atteint par la solution du système (7). Le point que nous avons ainsi défini est le centre de la courbe considérée, ce que nous avons démontré sans difficultés. Mais prouver qu'il n'y a pas d'autres centres que ceux qui sont déterminés par la solution du système (7) serait s'écarter de la solution de notre problème. En fait, notre exposé ultérieur n'aura aucunement à souffrir si nous nous appuyons sur des considérations purement algébriques et convenons d'appeler centre de la ligne donnée tout point dont les anciennes coordonnées satisfont au système (7) (autrement dit, un point tel qu'une fois l'origine des coordonnées placée en ce point, l'équation de la courbe prenne la forme (8)).

118. Désignons par δ le déterminant de l'équation (7)

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

La grandeur $\delta = AC - B^2$ est composée des coefficients des termes du second degré de l'équation (1) et est appelée *discriminant de ces termes.*

Si $\delta \neq 0$, le système (7) est compatible et déterminé, autrement dit le système a une solution et une seule (voir Appendice, n^{os} 2-4). En vertu de ce qui vient d'être indiqué, la courbe possède un centre et un seul.

Une courbe du second degré n'ayant qu'un seul centre est dite courbe centrale (ou conique à centre).

L'inégalité $\delta \neq 0$ est l'indice d'une conique à centre. Pour $\delta \neq 0$ les coordonnées du centre d'une courbe du second degré peuvent être exprimées par les formules

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} \tag{9}$$

(ces formules sont obtenues en appliquant les formules (8) du § 1 de l'Appendice au système (7)).

119. Le terme de degré zéro $\widetilde{F}$ dans l'équation (8) est exprimé par la formule assez compliquée (5). On peut considérablement simplifier cette expression. En effet, le regroupement des termes du membre droit de la formule nous donne:

$$\widetilde{F}=(Ax_0+By_0+D)\,x_0+(Bx_0+Cy_0+E)\,y_0+(Dx_0+Ey_0+F).$$

D'où et en vertu du système (7)

$$\widetilde{F}=Dx_0+Ey_0+F. \tag{10}$$

120. Si $\delta\neq 0$, l'expression (10) peut être encore transformée en appliquant les formules (9). En remplaçant x_0 et y_0 dans le membre droit de (10) d'après les formules (9), nous aurons:

$$\widetilde{F}=\frac{D\begin{vmatrix}B & D\\ C & E\end{vmatrix}+E\begin{vmatrix}D & A\\ E & B\end{vmatrix}+F\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}}. \tag{11}$$

Le numérateur de la fraction obtenue peut être inscrit sous forme d'un déterminant du troisième ordre:

$$D\begin{vmatrix}B & D\\ C & E\end{vmatrix}+E\begin{vmatrix}D & A\\ E & B\end{vmatrix}+F\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}. \tag{12}$$

Nous désignerons ce déterminant par le symbole Δ:

$$\begin{vmatrix}A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}=\Delta. \tag{13}$$

On appelle ce déterminant *discriminant du membre gauche* de l'équation générale du second degré.

En vertu des égalités (11) et (13),

$$\widetilde{F}=\frac{\Delta}{\delta}. \tag{14}$$

L'équation (8) se réduit donc à la forme:

$$A\widetilde{x}^2+2B\widetilde{x}\widetilde{y}+C\widetilde{y}^2+\frac{\Delta}{\delta}=0. \tag{15}$$

Exemple. Soit l'équation

$$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0.$$

Montrer que cette équation détermine une conique à centre, trouver son centre et simplifier l'équation donnée en plaçant l'origine des coordonnées en son centre.

Solution. Calculons tout d'abord δ :

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9.$$

Etant donné que $\delta \neq 0$, l'équation donnée détermine une conique à centre. Les coordonnées du centre peuvent être trouvées à l'aide des équations (7) qui prennent en ce cas la forme suivante :

$$5x_0 + 4y_0 - 9 = 0,$$
$$4x_0 + 5y_0 - 9 = 0.$$

La solution de ce système sera :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1.$$

Portons l'origine des coordonnées au point (1 ; 1). Les coordonnées de tous les points du plan seront transformées conformément aux formules :

$$x = \tilde{x} + 1, \quad y = \tilde{y} + 1,$$

et l'équation donnée prendra l'aspect suivant :

$$5\tilde{x}^2 + 8\tilde{x}\tilde{y} + 5\tilde{y}^2 + \tilde{F} = 0.$$

On peut calculer le terme de degré zéro $\tilde{F}$ d'après les formules (10) ou (14). Ce qui donnera : $\tilde{F} = -9$. Ainsi dans le nouveau système de coordonnées $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, l'équation prend la forme :

$$5\tilde{x}^2 + 8\tilde{x}\tilde{y} + 5\tilde{y}^2 - 9 = 0$$

(au n° 123 nous simplifierons encore cette équation, en déterminant en même temps la forme et la position de la courbe du second degré qu'elle détermine).

§ 43. FORME RÉDUITE DE L'ÉQUATION D'UNE CONIQUE À CENTRE

121. Soit l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Supposons que $\delta = AC - B^2 \neq 0$. Le système (7) du § 42 a alors une seule solution bien définie (x_0, y_0). Plaçons l'origine d'un nouveau système de coordonnées au point $(x_0 ; y_0)$, c'est-à-dire au centre de la courbe donnée et transformons l'équation (1) d'après les formules

$$x = \tilde{x} + x_0, \quad y = \tilde{y} + y_0,$$

il vient :

$$A\tilde{x}^2 + 2B\tilde{x}\tilde{y} + C\tilde{y}^2 + \tilde{F} = 0, \qquad (2)$$

où $\tilde{F}$ est déterminé par la formule (10) ou la formule (14) du § 42. Les simplifications ultérieures sont obtenues par rotation des nouveaux axes de coordonnées.

122. Tournons les axes de coordonnées autour de la nouvelle origine d'un angle quelconque α. Les coordonnées d'un point quelconque

du plan se transforment alors suivant les formules

$$\begin{aligned} \widetilde{x} &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ \widetilde{y} &= y' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \end{aligned} \tag{3}$$

où x' et y' sont les coordonnées du même point par rapport aux axes après rotation (voir formule (1) § 9). Remplaçons dans le membre gauche de l'équation (2) les variables $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ par leurs expressions (3). On a

$$\begin{aligned} A\widetilde{x}^2 - 2B\widetilde{x}\widetilde{y} + C\widetilde{y}^2 + \widetilde{F} = \\ = A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 2B(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + \\ + y'\cos\alpha) + C(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + \widetilde{F}. \end{aligned}$$

Ouvrons les parenthèses et groupons les termes par puissances décroissantes des nouvelles variables x' et y'. Mettant ensuite en facteur les nouvelles variables dans chaque groupe obtenu de nouveaux termes, nous trouvons:

$$A\widetilde{x}^2 + 2B\widetilde{x}\widetilde{y} + C\widetilde{y}^2 + \widetilde{F} = A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + \widetilde{F}, \tag{4}$$

où A', B', C' désignent les expressions entre parenthèses. Par conséquent,

$$A' = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha, \tag{5}$$

$$B' = -A\sin\alpha\cos\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + C\sin\alpha\cos\alpha, \tag{6}$$

$$C' = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha. \tag{7}$$

123. Afin de simplifier cette équation, nous nous efforcerons de choisir l'angle α de façon à éliminer le terme comprenant le produit des coordonnées courantes, autrement dit de façon que $B' = 0$. L'équation aura alors la forme:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + \widetilde{F} = 0. \tag{8}$$

Cherchons donc cet angle α. Posons $B' = 0$. En vertu de la formule (6) nous trouverons pour l'angle inconnu l'équation:

$$-A\sin\alpha\cos\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + C\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

ou encore

$$B\sin^2\alpha + (A - C)\sin\alpha\cos\alpha - B\cos^2\alpha = 0. \tag{9}$$

Supposons que $B \neq 0$ *; il résulte alors de l'équation (9) que $\cos\alpha \neq 0$ (car lorsque $\cos\alpha = 0$ nous avons $\sin^2\alpha = 1$, ce qui, vu l'inégalité $B \neq 0$, est en contradiction avec l'équation (9)). Divi-

* Si $B = 0$, l'équation initiale (1) a déjà la forme requise et il n'est pas nécessaire de la transformer.

sant tous les termes de l'équation (9) par $\cos^2\alpha$, nous lui donnons la forme

$$B\operatorname{tg}^2\alpha+(A-C)\operatorname{tg}\alpha-B=0. \tag{10}$$

D'où

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{C-A\pm\sqrt{(C-A)^2+4B^2}}{2B}. \tag{11}$$

Etant donné que $(C-A)^2+4B^2\geqslant 0$, le membre droit de la dernière égalité est une valeur réelle. Par conséquent, l'angle cherché α existe et est déterminé par la formule (11) (quel que soit le signe $\pm$ que nous choisissions).

Nous avons donc démontré que toute équation de forme (2) peut être ramenée à la forme (8).

Remarque. L'équation (10) permet de déterminer $\operatorname{tg}\alpha$, alors que dans les formules (3) ce sont $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ qui entrent en jeu. On peut calculer $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ connaissant $\operatorname{tg}\alpha$ en usant des formules connues de trigonométrie:

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\qquad \cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}. \tag{12}$$

La seule précaution à prendre est d'accorder les signes devant les racines carrées dans ces formules avec le signe de $\operatorname{tg}\alpha$. Si, par exemple, nous avons choisi $\operatorname{tg}\alpha<0$, $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ doivent de toute évidence avoir des signes contraires. Si, par contre, nous avons choisi $\operatorname{tg}\alpha>0$, $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ doivent avoir le même signe.

Exemple. Simplifier l'équation

$$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0.$$

Trouver quelle courbe elle détermine et tracer la figure représentant la position de cette courbe par rapport aux axes de coordonnées.

Solution. Nous avons déjà examiné cette équation dans l'exemple du n° 120. Elle détermine une conique à centre, car $\delta\neq 0$; le centre est le point S (1; 1). La transformation des coordonnées $x=\tilde{x}+1$, $y=\tilde{y}+1$, qui correspond au transfert de l'origine au centre, réduit cette équation à la forme

$$5\tilde{x}^2+8\tilde{x}\tilde{y}+5\tilde{y}^2-9=0 \tag{*}$$

(voir n° 120). Les simplifications ultérieures de l'équation obtenue seront effectuées conformément au plan proposé dans les n^{os} 122-123. Tournons les axes de coordonnées SX et SY d'un angle α déterminé par l'équation (10). On a

$$\operatorname{tg}^2\alpha-1=0,$$

d'où $\operatorname{tg}\alpha=\pm 1$. Choisissons l'une de ces deux solutions, par exemple $\operatorname{tg}\alpha=+1$. La rotation des axes d'un angle α correspond à une transformation des coordonnées suivant les formules

$$\tilde{x}=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\qquad \tilde{y}=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$

Dans le cas qui nous intéresse $\operatorname{tg}\alpha=1$. Par conséquent,

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Prenant les valeurs positives, nous avons :

$$\tilde{x}=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \qquad \tilde{y}=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

Remplaçant $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ par ces expressions dans l'équation (*), nous obtenons

$$5\tilde{x}^2+8\tilde{x}\tilde{y}+5\tilde{y}^2=\frac{5(x'-y')^2+8(x'-y')(x'+y')+5(x'+y')^2}{2}=9x'^2+y'^2.$$

Par conséquent, dans le système de coordonnées x' et y' l'équation de la courbe donnée prend la forme

$$9x'^2+y'^2-9=0,$$

soit

$$\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{9}=1.$$

C'est précisément l'équation canonique d'une ellipse dont les demi-axes sont $a=1$ et $b=3$. Son centre est situé au point S dont les coordonnées sont (1; 1) dans le système initial, et dont les axes de symétrie coïncident avec les axes de coordonnées Sx' et Sy' (fig. 73).

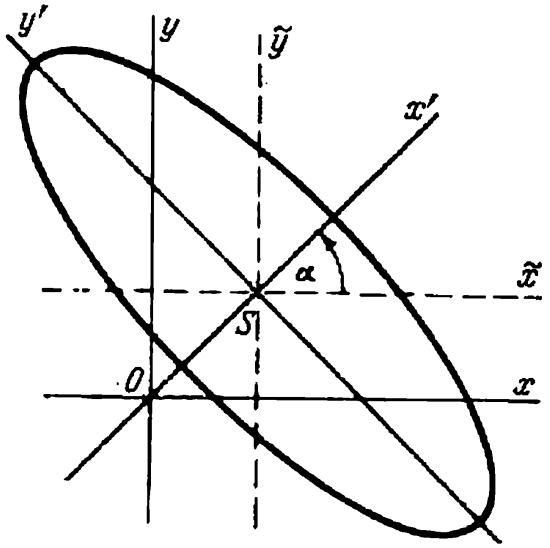


Fig. 73

124. Notre but immédiat est de déterminer quelles figures géométriques peuvent être déterminées par l'équation (8). Nous démontrerons à cet effet le lemme suivant.

Lemme. Si A', B', C' s'expriment à l'aide de A, B, C par les formules (5), (6) et (7), alors

$$A'C'-B'^2=AC-B^2.$$

Démonstration. Multiplions les termes des égalités (5), (6), (7) par 2 et appliquons les formules de trigonométrie suivantes :
$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$, $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$, $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$;
il s'ensuivra :

$$2A' = (A + C) + [(A - C)\cos 2\alpha + 2B\sin 2\alpha],$$
$$2B' = -(A - C)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha,$$
$$2C' = (A + C) - [(A - C)\cos 2\alpha + 2B\sin 2\alpha].$$

D'où

$$4A'C' - 4B'^2 = (A + C)^2 - [(A - C)\cos 2\alpha + 2B\sin 2\alpha]^2 -$$
$$- [(A - C)\sin 2\alpha - 2B\cos 2\alpha]^2 =$$
$$= (A + C)^2 - (A - C)^2 - 4B^2 = 4AC - 4B^2.$$

Par conséquent, $A'C' - B'^2 = AC - B^2$, ce qu'il fallait démontrer.

Nous pouvons démontrer à présent une proposition importante : *si l'équation*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

détermine une conique à centre ($\delta = AC - B^2 \neq 0$), *les deux coefficients A' et C' de l'équation réduite*

$$A'x'^2 + C'y'^2 + \widetilde{F} = 0, \qquad (8)$$

seront différents de zéro ($A' \neq 0$, $C' \neq 0$).

Démonstration. Etant donné que $B' = 0$, $A'C' - B'^2 = A'C'$. Mais en vertu du lemme $A'C' - B'^2 = AC - B^2 = \delta$. D'où $A'C' = \delta \neq 0$, et par conséquent, $A' \neq 0$ et $C' \neq 0$. Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. La démonstration que nous venons de donner indique que

$$A'C' = AC - B^2. \qquad (13)$$

De plus, il résulte de façon évidente des formules (5) et (7) du n° 122 que

$$A' + C' = A + C. \qquad (14)$$

Les égalités (13) et (14) permettent de trouver A' et C' connaissant A, B et C. Souvenons-nous encore de la formule (14) § 42, selon laquelle $\widetilde{F}$ s'exprime sous forme de rapport entre Δ et δ. Par conséquent, *les trois coefficients A', C' et $\widetilde{F}$ de l'équation* (8) *peuvent être obtenus directement d'après les coefficients de l'équation* (1) *sans avoir recours à la réduction de l'équation* (1) *à la forme* (8) *par transformation des coordonnées.*

125. Nous appellerons l'équation du second degré *elliptique* si $\delta > 0$, *hyperbolique* si $\delta < 0$ et *parabolique* si $\delta = 0$.

Il est évident que toute équation d'une conique à centre (c'est-à-dire toute équation où $\delta \neq 0$) est soit elliptique soit hyperbolique.

Pour l'équation réduite (8) nous avons: $A'C' = \delta$. Donc, l'équation (8) est elliptique pour $A'C' > 0$ et hyperbolique pour $A'C' < 0$. Les deux points suivants du présent paragraphe seront consacrés à l'analyse de l'équation (8) pour les cas respectifs où $A'C' > 0$ et $A'C' < 0$. Modifions au préalable la forme de l'équation (8). Faisons passer le terme de puissance zéro dans le membre droit de l'équation après quoi désignons le membre droit (compte tenu du signe) par la lettre H; de plus, laissant pour le moment de côté l'origine de l'équation (8), supprimons les indices des lettres. On a:

$$Ax^2 + Cy^2 = H. \tag{15}$$

126. Supposons l'équation (15) elliptique. Alors $AC > 0$, autrement dit les coefficients A et C sont de même signe. Pour éviter toute équivoque, considérons que c'est le signe plus (ce qu'on peut toujours obtenir en changeant tous les signes des termes de l'équation (15)). Quant à H, il est évident que trois cas peuvent se présenter: $H > 0$, $H < 0$ et $H = 0$. Voyons chacun de ces trois cas.

1) *Si* $H > 0$, *l'équation* (15) *définit une ellipse.* Pour nous en convaincre, modifions la forme de l'équation (15) et écrivons-la comme suit

$$\frac{x^2}{\frac{H}{A}} + \frac{y^2}{\frac{H}{C}} = 1.$$

Remarquons à présent que comme $\frac{H}{A}$ et $\frac{H}{C}$ sont des nombres positifs, les nombres $+\sqrt{\frac{H}{A}}$ et $+\sqrt{\frac{H}{C}}$ sont réels. Désignons le premier par a et le second par b:

$$a = +\sqrt{\frac{H}{A}}, \qquad b = +\sqrt{\frac{H}{C}}. \tag{16}$$

D'où

$$\frac{H}{A} = a^2, \qquad \frac{H}{C} = b^2;$$

et nous aboutissons à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

qui est, comme on sait, *l'équation canonique de l'ellipse.*

2) Si $H = 0$, seul le couple de nombres réels

$$x = 0, \qquad y = 0$$

satisfait à l'équation (15).

Par conséquent, pour $H = 0$ *l'équation* (15) *définit un seul point* (l'origine des coordonnées). C'est, par exemple, le cas de l'équation $x^2 + 4y^2 = 0$.

Dans le cas $H = 0$ on appelle habituellement l'équation (15) équation d'une *ellipse dégénérée*. Voici l'origine de cette dénomination. Si $H \to 0$ (étant supérieur à 0), on voit, d'après les formules (16), que $a \to 0$ et $b \to 0$, ce qui signifie que l'ellipse définie par

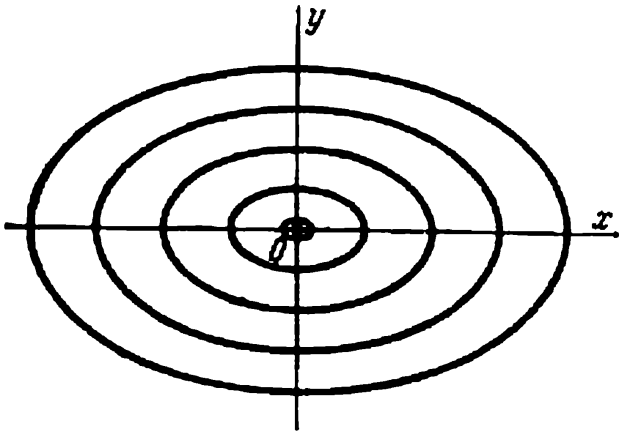


Fig. 74

l'équation (15) tend vers un point (fig. 74). Ce processus de « dégénérescence » de l'ellipse qui correspond à la transformation de l'équation $Ax^2 + Cy^2 = H$ en l'équation $Ax^2 + Cy^2 = 0$ nous porte à appeler cette dernière équation équation de l'ellipse dégénérée.

3) Si $H < 0$ aucune valeur réelle de x et y ne peut satisfaire à l'équation (15), car le membre gauche de cette équation ne peut en aucun cas être négatif. Par conséquent, *pour* $H < 0$ *l'équation* (15) *ne définit aucune figure géométrique sur le plan*. C'est par exemple le cas de l'équation

$$x^2 + 4y^2 = -16.$$

Pour $H < 0$ l'équation (15) est habituellement appelée équation d'une *ellipse imaginaire*.

127. Supposons à présent que l'équation

$$Ax^2 + Cy^2 = H \qquad (15)$$

soit hyperbolique. Alors $AC < 0$, autrement dit les coefficients A et C sont de signe contraire. Posons pour éviter toute confusion que $A > 0$ et $C < 0$ (ce que l'on peut toujours obtenir en changeant les signes de tous les termes de l'équation (15)). Quant à H, il est évident que trois cas sont possibles, soit $H > 0$, $H < 0$ et $H = 0$. Examinons chacun de ces trois cas.

1) *Si* $H > 0$ *ou si* $H < 0$, *l'équation* (15) *définit une hyperbole*. Pour le démontrer, modifions la forme de l'équation (15) que nous

écrirons

$$\frac{x^2}{\frac{H}{A}}+\frac{y^2}{\frac{H}{C}}=1. \tag{17}$$

Etant donné que $A>0$ et $C<0$, nous aurons dans le cas où $H>0$ $\frac{H}{A}>0$ et $\frac{H}{C}<0$; par conséquent, dans ce cas $\sqrt{\frac{H}{A}}$ et $\sqrt{-\frac{H}{C}}$ sont des nombres réels. Les désignant respectivement par a et b, nous aurons:

$$\frac{H}{A}=a^2, \quad \frac{H}{C}=-b^2. \tag{18}$$

En remplaçant $\frac{H}{A}$ et $\frac{H}{C}$ dans l'équation (17) par les seconds membres de ces égalités nous trouvons

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

C'est l'équation canonique de l'hyperbole (dont l'axe transverse est Ox).

Si $H<0$ nous aurons

$$\frac{H}{A}<0 \quad \text{et} \quad \frac{H}{C}>0.$$

Nous introduirons alors les notations suivantes

$$\sqrt{-\frac{H}{A}}=a, \quad \sqrt{-\frac{H}{C}}=b,$$

d'où

$$\frac{H}{A}=-a^2, \quad \frac{H}{C}=b^2. \tag{19}$$

En vertu des dernières égalités l'équation (17) se réduit à la forme

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

C'est également *l'équation canonique de l'hyperbole* (ayant pour axe transverse l'axe Oy).

2) Si $H=0$, l'équation (15) prend la forme

$$Ax^2+Cy^2=0$$

ou

$$(\sqrt{A}\,x+\sqrt{-C}\,y)\,(\sqrt{A}\,x-\sqrt{-C}\,y)=0 \tag{20}$$

(étant donné que $A>0$ et $C<0$, les nombres $\sqrt{A}$ et $\sqrt{-C}$ sont réels)
En vertu de l'équation (20), nous avons soit

$$\sqrt{A}\,x+\sqrt{-C}\,y=0,$$

soit

$$\sqrt{A}\,x-\sqrt{-C}\,y=0.$$

Chacune de ces équations définit une droite passant par l'origine des coordonnées. D'où nous pouvons conclure que *pour* $H=0$ *l'équation hyperbolique* (15) *définit une paire de droites qui se coupent* (à l'origine des coordonnées). Par exemple, l'équation $x^2-4y^2=0$ définit une paire de droites

$$x+2y=0 \quad \text{et} \quad x-2y=0.$$

Pour $H=0$, on convient d'appeler l'équation (15) équation de *l'hyperbole dégénérée*. L'origine de cette appellation est la suivante.

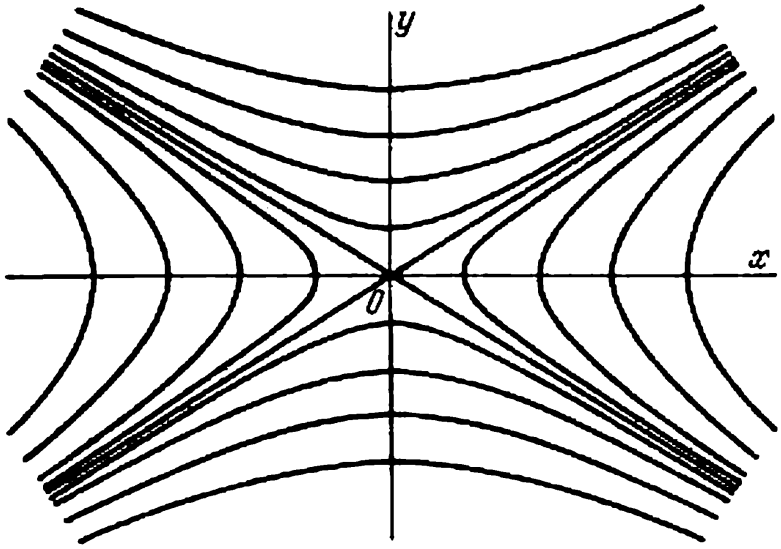


Fig. 75

Pour des valeurs constantes de A et C et différentes valeurs de H l'équation (15) définit diverses hyperboles (fig. 75). On voit par les formules (18) et (19) que le rapport $\frac{a}{b}$ reste invariable et que par conséquent toutes ces hyperboles ont les mêmes asymptotes. Si $H \to 0$, $a \to 0$ et $b \to 0$. (Ceci découle de même des égalités (18) ou (19).) Donc, l'hyperbole variable déterminée par l'équation (15) lorsque $H \to 0$ se rapproche indéfiniment des asymptotes fixes et se transforme à la limite en une paire de droites concourantes.

Ce processus de « dégénérescence » de l'hyperbole correspondant à la transformation de l'équation hyperbolique $Ax^2+Cy^2=H$ en l'équation $Ax^2+Cy^2=0$ constitue justement la raison pour laquelle on donne à cette dernière équation le nom d'équation de l'hyperbole dégénérée.

128. Ainsi donc, *toute équation de conique à centre* ($\delta \neq 0$) *est soit elliptique* ($\delta > 0$), *soit hyperbolique* ($\delta < 0$).

Toute équation elliptique est soit l'équation d'une ellipse ordinaire, soit l'équation d'une ellipse dégénérée, soit l'équation d'une ellipse imaginaire. Toute équation hyperbolique est soit l'équation d'une hyperbole ordinaire, soit l'équation d'une hyperbole dégénérée.

129. Le paragraphe suivant est consacré à la simplification et à la discussion de l'équation parabolique $\delta = 0$.

§ 44. SIMPLIFICATION DE L'ÉQUATION PARABOLIQUE

130. Admettons que l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

soit une équation p a r a b o l i q u e, c'est-à-dire qu'elle satisfasse à la condition $\delta = AC - B^2 = 0$. La condition $\delta = 0$ étant remplie, le système d'équations du centre (7), § 42, sera soit incompatible, soit indéterminé. Dans le cas où les équations de ce système sont incompatibles, la courbe ainsi définie n'a pas de centre et il est donc impossible de simplifier l'équation suivant le plan des §§ 42 et 43. Nous donnons plus bas un procédé qui permet de réduire n'importe quelle équation parabolique.

131. Commençons par la rotation des axes. Supposons tout d'abord que les axes tournent d'un angle quelconque α. Les coordonnées x et y d'un point quelconque se transforment suivant les formules

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

où x' et y' sont les nouvelles coordonnées du même point. Passant dans le membre gauche de l'équation aux nouvelles coordonnées nous obtenons:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = A(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)^2 +$$
$$+ 2B(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha) + C(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)^2 +$$
$$+ 2D(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha) + 2E(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha) + F.$$

Faisons disparaître toutes les parenthèses et groupons les termes suivant les puissances décroissantes des nouvelles coordonnées x' et y'. Mettant ensuite en facteur dans chaque groupe les nouvelles coordonnées, nous trouvons:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F =$$
$$= A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F',$$

où

$$A' = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha, \tag{3}$$

$$B' = -A\sin\alpha\cos\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + C\sin\alpha\cos\alpha, \tag{4}$$

$$C' = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha, \tag{5}$$

$$D' = D\cos\alpha + E\sin\alpha, \tag{6}$$

$$E' = -D\sin\alpha + E\cos\alpha, \tag{7}$$

$$F' = F. \tag{8}$$

Les formules (3), (4) et (5) ne se distinguent en rien des formules (5), (6) et (7), n° 122. C'est pourquoi, faisant le même raisonnement qu'au n° 123, nous *trouverons l'angle α de façon qu'après rotation des axes d'un angle α nous aurons* $B' = 0$. Cet angle est déterminé par l'équation (10), n° 123.

En vertu du lemme n° 124, nous avons $A'C' - B'^2 = AC - B^2$ d'où $A'C' = \delta$, et comme $\delta = 0$, $A'C' = 0$. Nous concluons de la dernière égalité que soit $A' = 0$, soit $C' = 0$.

Ainsi donc, par une rotation appropriée des axes, toute équation parabolique (1) se ramène soit à la forme

$$A'x'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0, \tag{9}$$

où $A' \neq 0$, soit à la forme

$$C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0, \tag{10}$$

où $C' \neq 0$.

Du point de vue algébrique les équations (9) et (10) ne se distinguent pas substantiellement l'une de l'autre (l'une se réduit à l'autre par substitution des dénominations des coordonnées et des lettres désignant les coefficients). C'est pourquoi il nous suffira de choisir l'une quelconque de ces deux équations. Prenons par exemple l'équation (10).

132. On obtient une nouvelle simplification de l'équation (10) par translation des axes (après rotation).

Commençons tout d'abord par poser l'équation de la façon suivante :

$$C'\left(y'^2 + 2\frac{E'}{C'}y'\right) + 2D'x' = -F'.$$

Ensuite, en modifiant l'expression entre parenthèses, pour obtenir un carré parfait (et transformant en conséquence le membre droit de l'équation), nous aurons :

$$C'\left(y'^2 + 2\frac{E'}{C'}y' + \frac{E'^2}{C'^2}\right) + 2D'x' = -F' + \frac{E'^2}{C'}$$

Pour abréger désignons tout le membre droit par H'. On aura :

$$C'\left(y'+\frac{E'}{C'}\right)^2+2D'x'=H'. \tag{11}$$

Deux cas peuvent se présenter.

1) $D'\neq 0$. Dans ce cas l'équation (11) peut être transcrite comme suit :

$$C'\left(y'+\frac{E'}{C'}\right)^2+2D'\left(x'-\frac{H'}{2D'}\right)=0. \tag{12}$$

Déplaçons parallèlement les axes de $\frac{H'}{2D'}$ dans la direction de l'axe Ox' et de $-\frac{E'}{C'}$, vers l'axe Oy'. Les coordonnées de tous les points du plan changeront alors conformément aux formules :

$$x'=x''+\frac{H'}{2D'},$$

$$y'=y''-\frac{E'}{C'}.$$

En passant aux nouvelles coordonnées dans l'équation (12), nous obtenons :

$$C'y''^2+2D'x''=0,$$

ou encore

$$y''^2=-2\frac{D'}{C'}x''.$$

En posant $-\frac{D'}{C'}=\pm p$ (nous choisirons le signe de façon que p soit positif), nous trouvons :

$$y''^2=2px'' \quad \text{ou} \quad y''^2=-2px''.$$

Chacune de ces équations est une équation canonique de la parabole. Par conséquent, *pour* $D'\neq 0$ *l'équation* (11) *définit une parabole.*

2) $D'=0$. Dans ce cas l'équation (11) prend la forme :

$$C'\left(y'+\frac{E'}{C'}\right)^2=H'. \tag{13}$$

Déplaçons les axes de coordonnées par translation parallèle vers Oy' d'une grandeur $-\frac{E'}{C'}$. Les coordonnées de tous les points du plan se modifieront alors conformément aux formules :

$$x'=x'',$$

$$y'=y''-\frac{E'}{C'}.$$

Ramenant l'équation précédente aux nouvelles coordonnées, nous avons

$$C'y''^2 = H', \tag{14}$$

d'où

$$y'' = \pm \sqrt{\frac{H'}{C'}}. \tag{15}$$

Supposons que $C' > 0$. Alors pour $H' > 0$ le membre droit est réel dans l'équation (15) et nous avons en vertu de cette équation deux valeurs différentes et constantes de y'', dont l'une est positive et l'autre négative. Par conséquent, *pour* $H' > 0$ *l'équation* (14) *définit une paire de droites parallèles* (disposées de part et d'autre du nouvel axe des abscisses à une distance de $\sqrt{\frac{H'}{C'}}$ chacune). C'est le cas par exemple pour l'équation $4y''^2 = 9$.

Pour $H' = 0$ nous trouvons à partir de (14) $y'' = 0$, autrement dit une équation qui définit une seule droite (le nouvel axe des abscisses). D'ailleurs, on dit couramment que pour $H' = 0$ l'équation (14) définit deux droites confondues. Enfin pour $H' < 0$ le membre droit de l'équation (15) est imaginaire, et par conséquent l'équation ne définit aucune figure géométrique. C'est par exemple le cas de l'équation $4y''^2 = -9$.

Ainsi donc, *pour* $D' = 0$ *l'équation* (11) *définit soit deux droites parallèles, soit deux droites confondues, ou ne définit aucune figure géométrique*. Il est cependant d'usage en géométrie analytique de dire que dans le cas où $D' = 0$ l'équation (11) définit une *parabole dégénérée*. Cette terminologie s'explique de la façon suivante. Si $D' \to 0$, l'équation (11) se transforme à la limite en l'équation (13). Lorsque D' varie, la parabole définie par l'équation (11) se modifie également et lorsque $D' \to 0$ elle s'allonge indéfiniment en se transformant en une paire de droites parallèles ou se déplace sur le plan et disparaît (s'échappe vers l'infini). Le processus décrit de « dégénérescence » de la parabole, correspondant à la transformation de l'équation (11) en l'équation (13), est à l'origine du nom donné à l'équation (13) que l'on appelle équation de la parabole dégénérée.

133. Faisant le bilan de ce qui vient d'être exposé, nous en venons à la conclusion suivante: *toute équation parabolique du second degré* (c'est-à-dire soumise à la condition $\delta = 0$) *est l'équation soit d'une parabole ordinaire, soit d'une parabole dégénérée.*

134. On dit souvent qu'une équation parabolique définit une courbe du second degré dépourvue de centre. Il convient de tenir compte du fait que cette terminologie est conventionnelle et ne reflète pas avec exactitude la nature des choses. Voici de quoi il s'agit. Une *parabole ordinaire* peut être à plein droit appelée courbe

non centrale car elle n'a pas de centre (géométriquement parlant, c'est évident : si la parabole avait un centre de symétrie elle ne pourrait s'éloigner à l'infini en suivant son axe de symétrie dans une seule direction). Mais une parabole dégénérée a une infinité de centres. En effet, chaque point du plan situé à égale distance des deux droites parallèles est le centre de cette paire de droites parallèles. Par conséquent, une paire de droites parallèles a une *droite des centres*. Une paire de droites confondues coïncide avec sa propre droite des centres.

Exemple 1. Soit l'équation

$$4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0;$$

réduire cette équation à sa plus simple expression, déterminer quelle courbe du deuxième ordre elle définit et tracer le graphique établissant la position de cette ligne par rapport aux axes de coordonnées.

Solution. Calculons tout d'abord δ :

$$\delta=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Etant donné que $\delta = 0$, l'équation est une équation parabolique. Nous devrons donc suivre le plan que nous avons fixé au n° 131. Nous commencerons par la rotation des axes. Nous déterminerons l'angle α à partir de l'équation (10), n° 123. Dans le cas présent nous aurons

$$2\operatorname{tg}^2\alpha-3\operatorname{tg}\alpha-2=0.$$

D'où $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$ ou $\operatorname{tg}\alpha=2$; choisissons la deuxième de ces solutions. Etant donné que $\operatorname{tg}\alpha=2$, nous trouvons d'après les formules (12), n° 123 :

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Les formules correspondantes de transformation des coordonnées seront :

$$x=\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}},\quad y=\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}.$$

En transformant d'après ces formules le membre gauche de l'équation donnée, nous trouvons :

$$4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=(2x-y)^2-2x-14y+7=$$
$$=5y'^2-6\sqrt{5}\,x'-2\sqrt{5}\,y'+7.$$

Par conséquent, dans le système des coordonnées x' et y' nous avons l'équation

$$5y'^2-6\sqrt{5}\,x'-2\sqrt{5}\,y'+7=0. \qquad (1)$$

Dans l'équation (1) le coefficient devant x' est différent de zéro ; par conséquent, cette équation définit une parabole et nous pouvons la réduire à la forme $C'y'^2 + 2D'x' = 0$ (voir n° 132). Nous modifierons à cet effet la forme de l'équa-

tion (1) comme suit

$$5\left[y'^2-2\frac{\sqrt{5}}{5}y'+\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2\right]-6\sqrt{5}\left(x'-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=0,$$

ou

$$\left(y'-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-\frac{6\sqrt{5}}{5}\left(x'-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=0.$$

Introduisons à présent de nouvelles coordonnées x'' et y'', en posant

$$x'=x''+\frac{\sqrt{5}}{5},\quad y'=y''+\frac{\sqrt{5}}{5},$$

ce qui correspond à une translation parallèle des axes d'une grandeur égale à $\frac{\sqrt{5}}{5}$ selon l'axe Ox' et de $\frac{\sqrt{5}}{5}$ selon l'axe Oy'. Dans le système de coordonnées x'' et y'' l'équation de la courbe donnée prendra la forme

$$y''^2=\frac{6\sqrt{5}}{5}x''.$$

C'est l'équation d'une parabole dont le paramètre est $p=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ et le sommet se trouve à l'origine des coordonnées du système x'', y''. La parabole est disposée

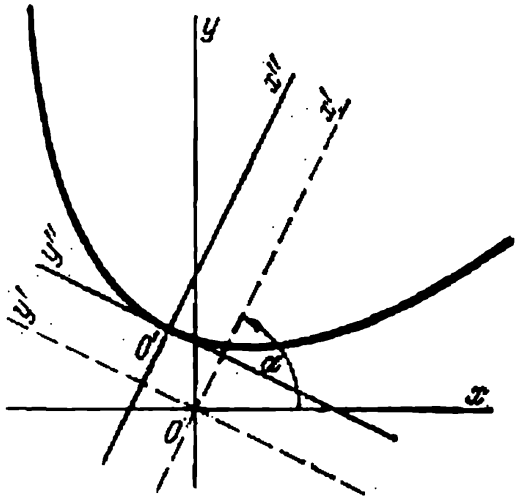


Fig. 76

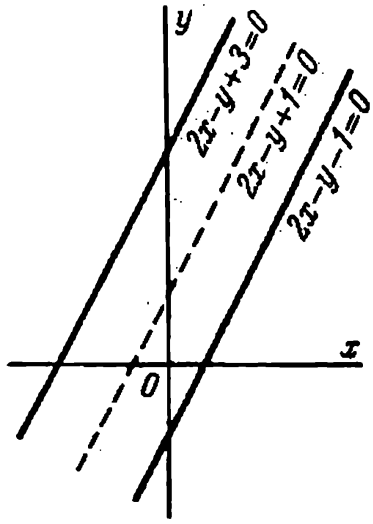


Fig. 77

symétriquement par rapport à l'axe des abscisses du système x'', y'' et s'étend indéfiniment dans la direction positive de cet axe. Les coordonnées du sommet sont dans le système des coordonnées x', y' $\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. Elles sont dans le système x, y $\left(-\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$. La position de cette parabole est indiquée sur la fig. 76.

Exemple 2. Trouver le centre de la courbe $4x^2-4xy+y^2+4x-2y-3=0$.

Solution. Les équations du centre sont

$$4x_0 - 2y_0 + 2 = 0,$$
$$-2x_0 + y_0 - 1 = 0.$$

Ce système est équivalent à l'équation $2x_0 - y_0 + 1 = 0$, et par conséquent la courbe possède une infinité de centres qui constituent la droite $2x - y + 1 = 0$. Remarquons que le membre gauche de l'équation donnée se décompose en facteurs du premier degré:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = (2x - y + 3)(2x - y - 1).$$

La courbe considérée est donc une paire de droites parallèles: $2x - y + 3 = 0$ et $2x - y - 1 = 0$. La droite $2x - y + 1 = 0$, constituée par les centres, n'est rien d'autre que la ligne médiane de ces deux droites (fig. 77).

§ 45. L'HYPERBOLE EN TANT QUE REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA PROPORTIONNALITÉ INVERSE. LA PARABOLE EN TANT QUE REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DU TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

135. On trouve souvent dans les mathématiques et leurs applications des équations de forme $xy = m$ ou $y = \frac{m}{x}$ ($m = \text{const} \neq 0$). On appelle une telle équation *équation de proportionnalité inverse des grandeurs x et y*. Il est facile de montrer que dans un système de coordonnées cartésiennes orthogonales x, y *une telle équation définit une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les axes de coordonnées.*

En effet, tournons les axes Ox et Oy d'un angle $\alpha = 45°$. Les coordonnées de tous les points du plan se transforment alors suivant les formules:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Transformant l'équation $xy = m$ conformément aux formules (1) nous trouvons dans le nouveau système de coordonnées

$$\frac{x'^2}{2m} - \frac{y'^2}{2m} = 1.$$

Nous voyons que c'est l'équation canonique d'une hyperbole équilatère dont les demi-axes sont $a = b = \sqrt{2\,|m|}$; ses asymptotes forment un angle de 45° avec les nouveaux axes de coordonnées et coïncident, par conséquent, avec les anciens axes. Si le nombre m est positif, l'hyperbole considérée a pour axe transverse le nouvel axe des abscisses, si m est négatif, l'hyperbole a pour axe transverse le nouvel axe de coordonnées. Nous en concluons que, comme nous l'affirmions, l'équation $xy = m$ définit une hyperbole équilatère,

dont les asymptotes coïncident avec les axes de coordonnées. L'hyperbole se trouve dans le premier et le troisième quadrant, si $m > 0$, et dans le deuxième et le quatrième quadrant, si $m < 0$ (fig. 78,*a* et *b*).

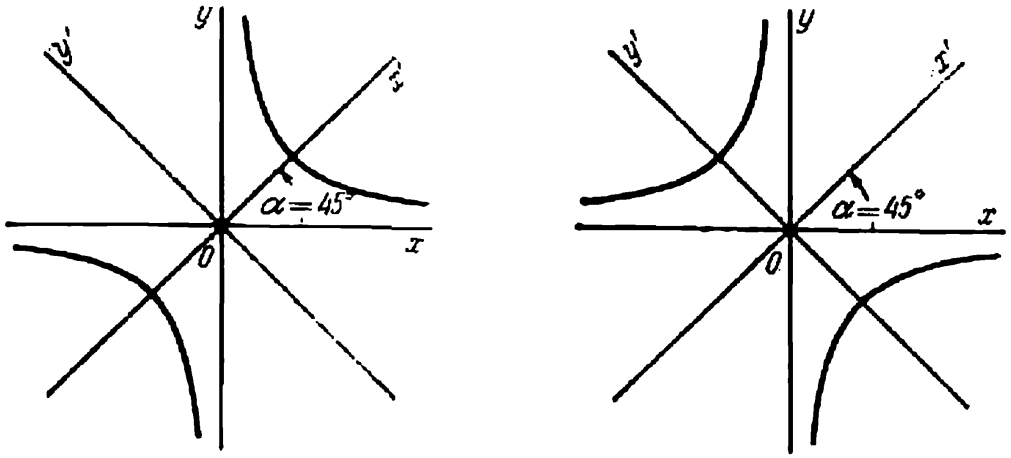


Fig. 78

En vertu de ce que nous venons d'énoncer, nous pouvons affirmer que *l'hyperbole équilatère est la représentation graphique de la proportionnalité inverse.*

136. L'équation

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \tag{2}$$

définit une parabole dont l'axe de symétrie est perpendiculaire à l'axe des abscisses; cette parabole sera ascendante si $a > 0$ *et descendante si* $a < 0$.

Pour démontrer ce qui vient d'être énoncé, il suffit de réduire l'équation (2) à sa forme canonique. Dans ce but transcrivons-la comme suit:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c,$$

ou encore

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}, \tag{3}$$

ou enfin

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Déplaçons à présent l'origine des coordonnées au point $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Alors les coordonnées de tous les points du plan se trans-

forment d'après les formules :

$$x = \tilde{x} - \frac{b}{2a}; \quad y = \tilde{y} + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

et dans le nouveau systeme de coordonnées l'équation (3) prend la forme :

$$\tilde{y} = a\tilde{x}^2,$$

ou

$$\tilde{x}^2 = \pm 2p\tilde{y}, \tag{4}$$

où p est un nombre positif déterminé par l'égalité $\pm p = \frac{1}{2a}$.

Nous avons obtenu l'équation canonique d'une parabole dont le sommet est placé à l'origine des coordonnées et qui est disposée

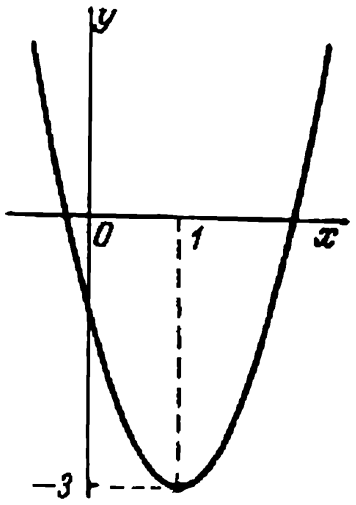


Fig. 79

symétriquement par rapport au nouvel axe des ordonnées. Cette parabole est ascendante ou descendante suivant que le nombre $a = \frac{1}{\pm 2p}$ sera positif ou négatif. Etant donné que le nouvel axe des ordonnées est perpendiculaire à l'ancien axe des abscisses, la parabole est disposée comme nous l'avons indiqué, ce qui démontre notre proposition.

137. L'expression $ax^2 + bx + c$ est dite *trinôme du second degré* en x, en vertu de quoi nous pouvons dire que la *parabole* (à axe vertical) *est le graphique du trinôme du second degré.*

Exemple. L'équation $y = 2x^2 - 4x - 1$ définit une parabole ascendante car $a = 2 > 0$. Pour déterminer son sommet, transcrivons l'équation donnée comme suit : $y + 3 = 2(x - 1)^2$. Pour réduire cette équation à la forme canonique il faut déplacer l'origine des coordonnées au point (1 ; −3). Ce point est le sommet de la parabole considérée (fig. 79).

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

CHAPITRE VII

QUELQUES PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

§ 46. COORDONNÉES CARTÉSIENNES ORTHOGONALES DANS L'ESPACE

138. Quand on indique un procédé permettant de définir la position des points de l'espace par des nombres, on dit qu'un système de coordonnées est appliqué à l'espace. Nous allons examiner à présent le plus simple des systèmes de coordonnées qui est dit système de coordonnées cartésiennes orthogonales.

Un système de coordonnées cartésiennes orthogonales dans l'espace est déterminé par le choix d'une unité de longueur et de trois axes concourants, formant entre eux des angles droits et numérotés dans un certain ordre (c'est-à-dire qu'on a indiqué lequel de ces axes est le premier, lequel le deuxième et lequel le troisième).

Le point d'intersection des axes est appelé *origine des coordonnées* et les axes *axes de coordonnées*, le premier axe des *abscisses*, le deuxième axe des *ordonnées* et le troisième axe des *cotes*.

Désignons l'origine des coordonnées par O, l'axe des abscisses par les lettres Ox, l'axe des ordonnées par Oy et l'axe des cotes par Oz. Sur les figures on écrit les lettres x, y et z auprès des axes correspondants dans le sens positif à partir du point O à l'endroit où le tracé de l'axe s'interrompt. Par conséquent, la position même de la lettre indique l'orientation de l'axe.

Soit un point M quelconque de l'espace. Projetons le point M sur les axes de coordonnées, autrement dit abaissons de M des perpendiculaires sur Ox, Oy et Oz. Désignons les pieds de ces perpendiculaires respectivement par M_x, M_y et M_z.

On appelle *coordonnées du point M dans le système donné les nombres*

$$x = OM_x, \quad y = OM_y, \quad z = OM_z,$$

où OM_x désigne la grandeur du segment $\overline{OM}_x$ de l'axe des abscisses, OM_y la grandeur du segment $\overline{OM}_y$ de l'axe des ordonnées et OM_z la grandeur du segment $\overline{OM}_z$ de l'axe des cotes (on a vu au n° 2 ce que l'on entend par grandeur d'un segment de l'axe). *On appelle le nombre x première coordonnée ou abscisse du point M, le nombre y deuxième coordonnée ou ordonnée du point M, le nombre z troisième coordonnée ou cote du point M.* Dans le texte les coordonnées sont notées entre parenthèses à côté de la lettre qui désigne le point lui-même: $M(x; y; z)$.

On peut également obtenir la projection du point M sur l'axe Ox en abaissant une perpendiculaire sur le plan Oxy, puis en abaissant du pied de cette perpendiculaire, que nous désignerons par M_{xy}, une nouvelle perpendiculaire sur l'axe Ox; cette dernière perpendiculaire coupera précisément l'axe Ox au point M_x; autrement dit M_x est la projection du point M_{xy} sur l'axe Ox. La projection du point M_{xy} sur l'axe Oy sera, de toute évidence, le point M_y.

De même, si M_{xz} et M_{yz} sont les pieds des perpendiculaires abaissées du point M respectivement sur les plans Oxz et Oyz, nous obtiendrons en projetant M_{xz} et M_{yz} sur les axes de coordonnées les points M_x, M_y et M_z (chacun de ces points M_x, M_y, M_z est obtenu par deux moyens: par exemple, le point M_x est la projection sur l'axe Ox tant du point M_{xy} que du point M_{xz}).

Les points M_x, M_y, M_z, M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} et O sont les sommets d'un parallélépipède rectangle dont les arêtes affectées des signes convenables sont les coordonnées du point M. Ce parallélépipède est représenté sur la fig. 80.

139. Soit un système de coordonnées cartésiennes orthogonales. Chaque point de l'espace possède dans ce système trois coordonnées x, y, z. Réciproquement, quels que soient trois nombres (réels) x, y, z, il y aura dans l'espace un point bien défini dont l'abscisse sera x, l'ordonnée y et la cote z. Pour déterminer la position du point d'après ses coordonnées il faut prendre sur l'axe des abscisses à partir de l'origine des coordonnées un segment $\overline{OM}_x$ de grandeur x, sur l'axe des ordonnées un segment $\overline{OM}_y$ de grandeur y et sur l'axe des cotes un segment $\overline{OM}_z$ de grandeur z. Puis nous ferons passer par le point M_x un plan perpendiculaire à l'axe Ox, par le point M_y un plan perpendiculaire à l'axe Oy et par le point M_z un plan perpendiculaire à l'axe Oz. Le point d'intersection de ces trois plans sera le point recherché.

140. Nous allons maintenant fixer le sens de certains termes (considérant les axes donnés comme il est indiqué sur la fig. 80).

Le plan Oyz partage tout l'espace en deux demi-espaces. Nous appellerons le demi-espace qui comprend la partie positive de l'axe Ox *proche*, le deuxième demi-espace étant dit *lointain*.

De même, le plan *Oxz* partage l'espace entier en deux demi-espaces. Nous appellerons demi-espace *droit* celui qui comprend le sens positif de l'axe *Oy*, et demi-espace *gauche* celui qui comprend la partie négative de l'axe *Oy*.

Et enfin, le plan *Oxy* partage l'espace en deux demi-espaces que nous appellerons demi-espaces *supérieur* et *inférieur* suivant qu'ils contiennent la partie positive ou négative de l'axe *Oz*.

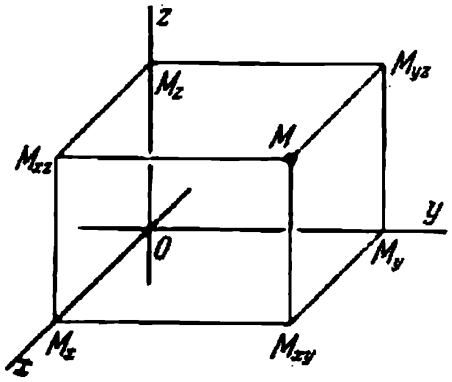


Fig. 80

141. Soit M un point quelconque du demi-espace proche. Le segment OM_x a alors sur l'axe Ox une orientation positive et par conséquent l'abscisse $x = OM_x$ du point M est positive. Si par contre le point M est situé dans le demi-espace lointain, le segment $\overline{OM}_x$ a sur l'axe Ox un sens négatif et le nombre $x = OM_x$ est négatif. Enfin, dans le cas où le point M appartient au plan Oyz, sa projection M_x sur l'axe Ox coïncide avec le point O et $x = OM_x$ est nul.

Par conséquent, *tous les points du demi-espace proche ont des abscisses positives* ($x > 0$), *tous les points du demi-espace lointain ont des abscisses négatives* ($x < 0$); *les abscisses des points appartenant au plan Oyz sont nulles* ($x = 0$).

Un raisonnement analogue nous permet d'établir facilement que *tous les points du demi-espace droit ont des ordonnées positives* ($y > 0$), *tous les points du demi-espace gauche ont des ordonnées négatives* ($y < 0$), *les ordonnées des points appartenant au plan Oxz sont nulles* ($y = 0$).

Enfin, *tous les points du demi-espace supérieur ont des cotes positives* ($z > 0$), *tous les points du demi-espace inférieur ont des cotes négatives* ($z < 0$); *les cotes de tous les points appartenant au plan Oxy sont nulles* ($z = 0$).

Etant donné que les points du plan *Oxz* sont caractérisés par l'égalité $y = 0$, et les points du plan *Oxy* par l'égalité $z = 0$, nous concluons que *tous les points de l'axe Ox sont caractérisés par deux*

égalités

$$y=0, \quad z=0.$$

De même, *les points de l'axe Oy sont caractérisés par les deux égalités*

$$x=0, \quad z=0$$

et *les points de l'axe Oz par les égalités*

$$x=0, \quad y=0.$$

Remarquons que l'origine des coordonnées O en tant que point d'intersection des trois axes a ses trois coordonnées nulles: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et c'est ce qui la caractérise (autrement dit, seul le point O a toutes ses coordonnées nulles).

142. L'ensemble des trois plans *Oxy*, *Oxz*, *Oyz* partage le plan en huit parties, dites *trièdres de coordonnées*, qui sont numérotés suivant la règle que nous allons donner. On appelle premier trièdre celui qui se trouve simultanément dans les demi-espaces proche, droit et supérieur; deuxième celui qui est situé dans les demi-espaces lointain, droit et supérieur; troisième celui qui est situé dans les demi-espaces lointain, gauche et supérieur; quatrième celui qui est situé dans les demi-espaces proche, gauche et supérieur; les cinquième, sixième, septième et huitième trièdres sont ceux qui sont situés dans le demi-espace inférieur respectivement sous les premier, deuxième, troisième et quatrième trièdres.

Soit M un point quelconque de coordonnées x, y, z. Il résulte de ce qui vient d'être énoncé que

si $x>0$, $y>0$, $z>0$ M est situé dans le premier trièdre,

si $x<0$, $y>0$, $z>0$ M est situé dans le deuxième trièdre,

si $x<0$, $y<0$, $z>0$ M est situé dans le troisième trièdre,

si $x>0$, $y<0$, $z>0$ M est situé dans le quatrième trièdre,

si $x>0$, $y>0$, $z<0$ M est situé dans le cinquième trièdre,

si $x<0$, $y>0$, $z<0$ M est situé dans le sixième trièdre,

si $x<0$, $y<0$, $z<0$ M est situé dans le septième trièdre,

si $x>0$, $y<0$, $z<0$ M est situé dans le huitième trièdre.

L'examen des demi-espaces et trièdres de coordonnées est utile en ce sens qu'il nous permet de mieux nous orienter dans la position des points définis par les signes de leurs coordonnées.

§ 47. VECTEUR LIBRE. PROJECTION D'UN VECTEUR SUR UN AXE

143. La physique élémentaire a appris au lecteur que certaines grandeurs physiques, comme par exemple la température, la masse, la densité, sont des grandeurs dites s c a l a i r e s. Certaines autres

grandeurs, comme par exemple les forces, les déplacements d'un point, les vitesses, les accélérations, sont des grandeurs dites v e c t o r i e l l e s.

Toute grandeur scalaire est définie par un nombre, qui exprime le rapport entre ce nombre et une unité de mesure appropriée. Par contre, un n o m b r e s e u l n e s u f f i t p a s pour caractériser une grandeur v e c t o r i e l l e, étant donné que les grandeurs vectorielles sont de plus caractérisées par leur s e n s.

Les vecteurs géométriques servent d'expression abstraite des grandeurs vectorielles concrètes (physiques).

On appelle *vecteurs géométriques* ou simplement *vecteurs* des segments orientés.

Les vecteurs géométriques sont l'objet du calcul vectoriel, de même que les nombres sont l'objet de l'arithmétique. Le calcul vectoriel étudie certaines opérations effectuées sur les vecteurs. Ces opérations sont les abstractions mathématiques de certaines opérations communes effectuées sur les diverses grandeurs vectorielles concrètes en physique.

Ayant pris naissance à l'origine pour satisfaire aux exigences de la physique, le calcul vectoriel s'est avéré fructueux en tant que discipline mathématique. Dans cet ouvrage les vecteurs sont utilisés en tant qu'instrument commode de la géométrie analytique.

Le chapitre suivant est consacré aux éléments de calcul vectoriel. Dans le présent chapitre nous nous bornerons à énoncer certaines propositions élémentaires purement géométriques touchant les segments orientés dans l'espace.

Il nous semble cependant utile de donner dès à présent certains notions, notations et termes utilisés dans le calcul vectoriel.

144. Nous désignerons un vecteur, en tant que segment orienté, par deux lettres majuscules surmontées d'une flèche horisontale, la première lettre désignant l'origine et la seconde l'extrémité du vecteur. Mais nous userons également pour la désignation d'un vecteur d'une lettre minuscule surmontée d'une flèche (par exemple, $\vec{a}$). Sur les figures un vecteur sera toujours indiqué par une *flèche*. Si le vecteur est désigné par une seule lettre, nous poserons cette lettre près de la pointe de la flèche. Nous appellerons également l'origine du vecteur *point d'application*. Un vecteur dont l'origine et l'extrémité coïncident est un vecteur nul. Les vecteurs portés par une même droite ou par des droites parallèles sont dits *colinéaires*.

145. D é f i n i t i o n d e l'é g a l i t é d e s v e c t e u r s. *Deux vecteurs sont dits égaux s'ils sont colinéaires, de longueur égale et de même sens.*

La fig. 81 représente des vecteurs égaux $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ($\vec{AB} = \vec{CD}$) *; la fig. 82, des vecteurs inégaux $\vec{PQ}$ et $\vec{PR}$ ($\vec{PQ} \neq \vec{PR}$), $\vec{EF}$ et $\vec{GH}$ ($\vec{EF} \neq \vec{GH}$).

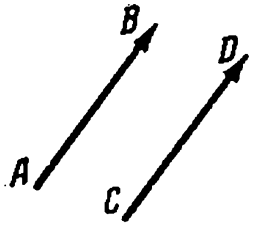


Fig. 81

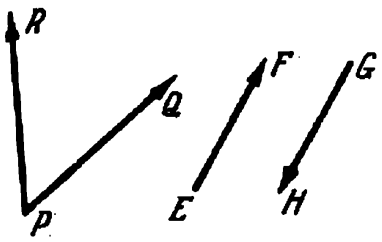


Fig. 82

Il est évident que *si deux vecteurs sont égaux chacun à un troisième, ils sont égaux entre eux.*

Il découle de la définition de l'égalité des vecteurs que quels que soient le vecteur $\vec{a}$ et le point P il existe un vecteur et un seul $\vec{PQ}$ ayant son origine en P et égal à $\vec{a}$; autrement dit, le point d'application de tout vecteur peut être choisi arbitrairement. En vertu de ce qui vient d'être énoncé, on étudie les vecteurs en géométrie à leur position près (autrement dit, on ne distingue pas deux vecteurs égaux que l'on déduit l'un de l'autre par translation). C'est en ce sens que les vecteurs sont dits *libres*.

146. On appelle la *longueur d'un vecteur* (à l'échelle donnée) *son module*. Le module d'un vecteur nul est égal à zéro. Pour le module d'un vecteur $\vec{a}$ on se sert de la notation $|\vec{a}|$ ou a. Il est évident que si $\vec{a} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Il est évident que la réciproque n'est pas vraie.

147. Soient un axe quelconque u et un vecteur $\vec{AB}$. Abaissons des points A et B des perpendiculaires sur l'axe u et désignons leurs pieds respectivement par A' et B'. *Le nombre $A'B'$, autrement dit la grandeur du segment orienté $A'B'$ de l'axe u, est la projection du vecteur $\vec{AB}$ sur l'axe u*:

$$\text{Proj}_u \vec{AB} = A'B'.$$

On voit sur la fig. 83 comment on obtient la projection du vecteur $\vec{AB}$ où pour plus d'évidence on a fait passer les plans α et β par les points A et B. Ces plans, perpendiculaires à l'axe u, déterminent sur

* Nous supposons que les vecteurs sont situés dans le plan de la figure.

cet axe les points A' et B' (les droites AA' et BB' étant de ce fait perpendiculaires à l'axe).

148. Choisissons dans l'espace un point quelconque S et deux demi-droites issues de ce point dont l'une sera de même direction que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et l'autre de même direction que l'axe u (fig. 83).

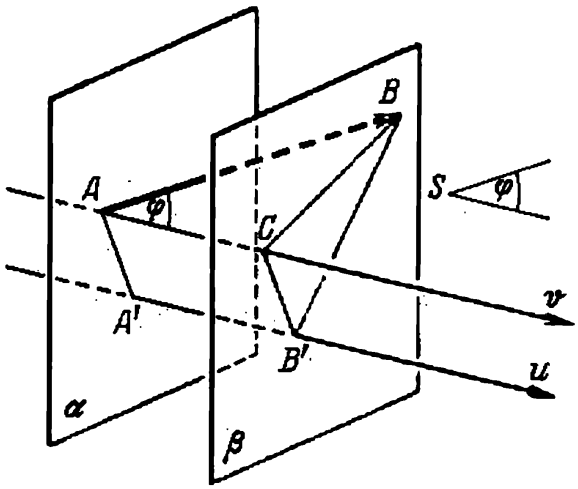


Fig. 83

L'angle φ, formé par ces deux demi-droites, est dit *angle de pente ou d'inclinaison* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à l'axe u. Il est évident que le choix du point S qui sert à la construction de l'angle φ est quelconque. Il est également évident que si nous remplaçons l'axe u par un autre axe de même direction, l'angle φ restera inchangé. Désignons par v un axe de même direction que l'axe u et passant par le point A. En vertu de ce qui vient d'être dit, l'angle d'inclinaison du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe v est égal à φ. Soit C le point où l'axe v coupe le plan β. Etant donné que l'axe v est parallèle à l'axe u, lui-même perpendiculaire au plan β, l'axe v est perpendiculaire au plan β. Par conséquent, AC est la projection du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe v. Ensuite, étant donné que les axes u et v sont parallèles et de même direction, les segments de ces axes compris entre les plans parallèles α et β sont de même grandeur: $A'B' = AC$. D'où

$$\text{Proj}_u \overrightarrow{AB} = \text{Proj}_v \overrightarrow{AB}. \tag{1}$$

D'autre part, étant donné que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et l'axe v sont situés dans le même plan, nous sommes en droit d'appliquer la formule (7), n° 20. On aura :

$$\text{Proj}_v \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \varphi. \tag{2}$$

En comparant les égalités (1) et (2) nous trouvons

$$\text{Proj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\varphi. \tag{3}$$

Si, pour abréger, nous désignons le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par $\vec{a}$, la formule (3) prendra la forme suivante:

$$\text{Proj}_u \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi. \tag{4}$$

Ainsi donc, *la projection d'un vecteur sur un axe est égale au module de ce vecteur multiplié par le cosinus de l'angle d'inclinaison du vecteur sur l'axe.*

149. Soient deux vecteurs égaux $\overrightarrow{A_1B_1}$ et $\overrightarrow{A_2B_2}$ et un axe quelconque u. Etant donné que deux vecteurs égaux ont des modules égaux et la même inclinaison sur l'axe u, nous obtiendrons en appliquant à chacun d'eux la formule (3) des résultats identiques:

$$\text{Proj}_u \overrightarrow{A_1B_1} = \text{Proj}_u \overrightarrow{A_2B_2}.$$

Par conséquent, *des vecteurs égaux ont des projections égales sur le même axe.*

§ 48. PROJECTIONS D'UN VECTEUR SUR LES AXES DE COORDONNÉES

150. Soit un système de coordonnées cartésiennes orthogonales dans l'espace.

Considérons un vecteur quelconque $\vec{a}$. Soient X la projection de ce vecteur $\vec{a}$ sur l'axe Ox, Y sa projection sur l'axe Oy et Z sa projection sur l'axe Oz.

Conformément au n° 149 chaque vecteur égal à $\vec{a}$ possède en qualité de projections sur les axes de coordonnées les mêmes nombres X, Y, Z.

Réciproquement, si un certain vecteur $\vec{b}$ a des projections sur les axes de coordonnées égales à celles du vecteur $\vec{a}$, nous aurons $\vec{b} = \vec{a}$. Pour nous en convaincre, transportons les origines des deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ à l'origine des coordonnées. Désignons les extrémités des vecteurs respectivement par les lettres A et B. Etant donné que les deux vecteurs ont des projections égales X sur l'axe Ox, il est évident que les deux extrémités des vecteurs doivent appartenir à un même plan perpendiculaire à l'axe Ox, au plan qui détermine sur l'axe Ox un segment de grandeur X (en comptant à partir de l'origine des coordonnées). Pour des raisons analogues, les points A et B

doivent appartenir à un même plan perpendiculaire à l'axe Oy, découpant sur l'axe Oy un segment de grandeur Y, ainsi qu'au plan perpendiculaire à l'axe Oz, découpant sur cet axe un segment égal à Z. Mais dans ce cas les deux points A et B sont nécessairement confondus, étant donné que les trois plans indiqués se coupent en un seul point. Par conséquent,

$$\vec{b} = \overline{OB} = \overline{OA} = \vec{a}.$$

Ce que nous venons d'énoncer signifie que *les projections d'un vecteur sur les axes de coordonnées étant données, le vecteur est parfaitement défini en tant que vecteur libre*, c'est-à-dire à sa position près dans l'espace. C'est pourquoi on appelle les projections X, Y, Z du vecteur $\vec{a}$ ses coordonnées (cartésiennes).

Dans le cours de l'exposé, lorsque nous voudrons indiquer que le vecteur $\vec{a}$ a des coordonnées X, Y, Z, nous écrirons:

$$\vec{a} = \{X\,;\ Y\,;\ Z\},$$

considérant le membre droit de cette égalité comme un nouveau symbole désignant un vecteur.

151. Il est souvent nécessaire en géométrie analytique de calculer les coordonnées d'un vecteur, c'est-à-dire les projections du vecteur sur les axes de coordonnées, les coordonnées de son extrémité et de son origine étant connues. Ce problème est résolu grâce au théorème suivant.

Théorème 15. Quels que soient deux points A $(x_1\,;\ y_1\,;\ z_1)$ et B $(x_2\,;\ y_2\,;\ z_2)$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont définies par les formules:

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1. \tag{1}$$

Démonstration. Abaissons des points A et B des perpendiculaires sur l'axe Ox et désignons les pieds de ces perpendiculaires par A_x et B_x (voir fig. 84 où l'on a tracé pour plus de clarté les plans perpendiculaires à Ox). Les points A_x et B_x ont respectivement sur l'axe Ox les coordonnées x_1 et x_2. Par suite, en vertu du théorème 1 (n° 5),

$$A_xB_x = x_2 - x_1.$$

Or, $A_xB_x = X$ et, par conséquent, $X = x_2 - x_1$. On établit de façon analogue que $Y = y_2 - y_1$ et $Z = z_2 - z_1$.

Par conséquent, *pour obtenir les coordonnées d'un vecteur il faut soustraire des coordonnées de son extrémité les coordonnées correspondantes de son origine.*

152. Soit $M(x; y; z)$ un point quelconque de l'espace. Le vecteur $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, autrement dit *le vecteur joignant l'origine des coordonnées au point M et dirigé de O vers M est appelé rayon vecteur de ce point.*

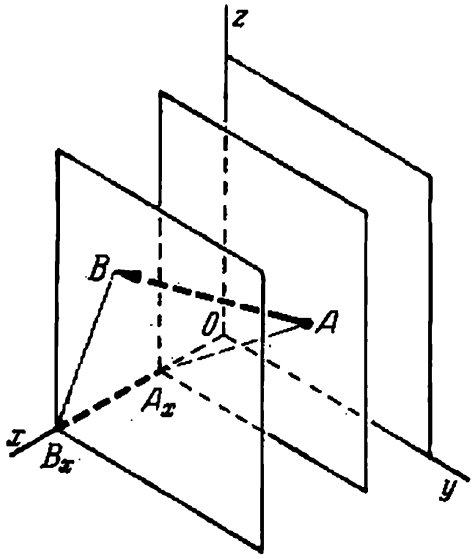


Fig. 84

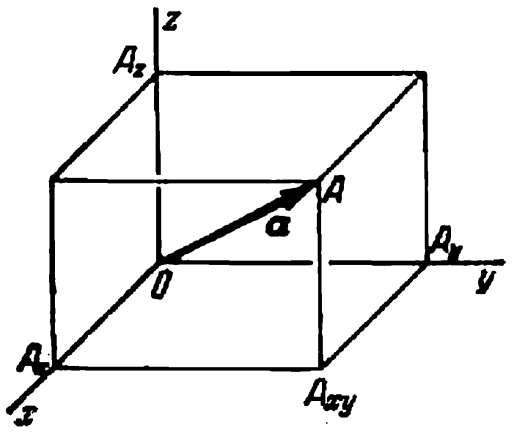


Fig. 85

Calculant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ d'après les formules (1), soit en posant dans les formules indiquées $x_2 = x$, $y_2 = y$, $z_2 = z$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, nous aurons

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z,$$

autrement dit, *les coordonnées du point M et les coordonnées du rayon vecteur* $\overrightarrow{OM}$ *sont les mêmes.* Remarquons, toutefois, qu'outre les formules indiquées (1) cette affirmation découle directement de la définition des coordonnées cartésiennes du point M (voir n° 138).

153. Soit un vecteur quelconque $\vec{a} = \{X; Y; Z\}$. Nous allons maintenant établir la formule qui permettra de calculer le module du vecteur, connaissant ses coordonnées X, Y, Z. Supposons pour plus de simplicité que le vecteur soit appliqué à l'origine des coordonnées. Faisons passer par l'extrémité du vecteur des plans perpendiculaires aux axes de coordonnées; désignons les points d'intersection de ces plans avec les axes respectivement par A_x, A_y, A_z. Les plans que nous venons d'établir forment avec les plans de coordonnées un parallélépipède rectangle, dont le segment OA est la diagonale (fig. 85). La géométrie élémentaire nous indique que le carré de la longueur de la diagonale d'un parallélépipède rectangle est égal à la somme des carrés des arêtes. Par conséquent,

$$OA^2 = OA_x^2 + OA_y^2 + OA_z^2.$$

Or, $OA = |\vec{a}|$, $OA_x = X$, $OA_y = Y$, $OA_z = Z$. Il découle donc de l'égalité précédente que

$$|\vec{a}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

soit

$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \qquad (2)$$

Cette dernière égalité est précisément l'expression du module d'un vecteur quelconque en fonction de ses coordonnées.

§ 49. COSINUS DIRECTEURS

154. Désignons par α, β et γ les angles que forme le vecteur $\vec{a}$ avec les axes de coordonnées. On appelle $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ les *cosinus directeurs du vecteur* $\vec{a}$. Ils ont reçu cette dénomination parce qu'une fois donnés ils définissent la direction de ce vecteur.

Le vecteur est entièrement défini (en tant que vecteur libre) lorsqu'en plus des cosinus directeurs on donne également le module du vecteur. Dans ce cas les coordonnées du vecteur peuvent être calculées d'après les formules:

$$X = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad Y = |\vec{a}|\cos\beta, \quad Z = |\vec{a}|\cos\gamma \qquad (1)$$

(voir n° 148).

155. Résumons ce qui vient d'être dit dans les deux numéros précédents par le théorème suivant.

Théorème 16. *Quel que soit le vecteur* $\vec{a}$, *son module* $|\vec{a}|$, *ses cosinus directeurs* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *et les coordonnées* X, Y, Z *sont liés par relations*:

$$X = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad Y = |\vec{a}|\cos\beta, \quad Z = |\vec{a}|\cos\gamma, \qquad (1)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \qquad (2)$$

Remarque. *Les quatre dernières formules permettent de calculer les cosinus directeurs connaissant les coordonnées du vecteur.* Il résulte en effet de ces formules que:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Comme toujours lorsque les signes ne sont pas indiqués, ce sont les racines arithmétiques que l'on entend ici.

156. En élevant au carré les deux membres de chacune des égalités (3), et en faisant la somme des résultats obtenus, nous trouvons:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{X^2+Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2};$$

d'où

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \qquad (4)$$

A l'aide de la relation (4) *on peut calculer chacun des angles* α, β, γ *connaissant les deux autres et sachant de plus si l'angle cherché est aigu ou obtus.*

§ 50. DISTANCE DE DEUX POINTS. DIVISION D'UN SEGMENT DANS UN RAPPORT DONNÉ

157. En géométrie analytique dans l'espace, comme en géométrie analytique plane, chaque problème, quelque complexe qu'il soit, se ramène à plusieurs problèmes élémentaires. Ces problèmes sont: la détermination de la distance d'un point à un autre, le problème de la division d'un segment suivant un rapport donné, le problème qui consiste à calculer l'angle que font deux vecteurs, etc. Nous allons examiner dans le présent paragraphe les deux premiers de ces problèmes.

158. Soient deux points quelconques M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Il est nécessaire de calculer la distance d de l'un à l'autre.

On obtient immédiatement le résultat cherché en appliquant le théorème 15 (n° 151) et les formules (2) du paragraphe précédent.

Nous avons en effet:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\};$$

ensuite, d est le module du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$, par conséquent,

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (1)$$

Cette formule donne la solution du problème.

159. Soient deux points quelconques M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Il s'agit de trouver sur la droite M_1M_2 le point M qui partage le segment M_1M_2 dans le rapport λ.

Ce problème se résout de la même façon que le problème analogue de géométrie analytique plane (voir n° 24). C'est pourquoi nous donnons directement le résultat: *si* x, y, z *sont les coordonnées du point*

M cherché, alors

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

On trouvera en particulier les coordonnées du point pour $\lambda=1$:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

160. Pour la solution de certains problèmes élémentaires de géométrie analytique dans l'espace il est commode d'appliquer certaines opérations, que l'on appelle addition des vecteurs, multiplication d'un vecteur par un nombre, multiplication scalaire des vecteurs et multiplication vectorielle des vecteurs. Les définitions et les propriétés essentielles de ces opérations seront exposées dans les trois chapitres suivants.

CHAPITRE VIII

OPÉRATIONS LINÉAIRES SUR LES VECTEURS

§ 51. DÉFINITION DES OPÉRATIONS LINÉAIRES

161. On appelle opérations linéaires sur les vecteurs les opérations d'addition des vecteurs et de multiplication des vecteurs par des nombres.

Définition de la somme de deux vecteurs. *Soient deux vecteurs* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$. *On appelle somme* $\vec{a} + \vec{b}$ *le vecteur qui*

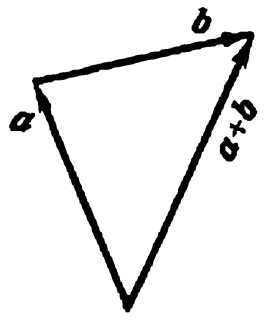


Fig. 86

joint l'origine du vecteur $\vec{a}$ *à l'extrémité du vecteur* $\vec{b}$, *à condition que le vecteur* $\vec{b}$ *soit appliqué à l'extrémité du vecteur* $\vec{a}$.

La construction de la somme $\vec{a} + \vec{b}$ est donnée sur la fig. 86. On appelle habituellement la règle d'addition des vecteurs « règle du triangle ».

Remarque. Il peut arriver que lorsque l'on trace la somme $\vec{a} + \vec{b}$ d'après la règle du triangle l'extrémité du vecteur $\vec{b}$ coïncide avec l'origine du vecteur $\vec{a}$. Alors $\vec{a} + \vec{b}$ est un vecteur nul : $\vec{a} + \vec{b} = 0$.

Définition du produit d'un vecteur et d'un nombre. *Soient un vecteur* $\vec{a}$ *et un nombre* α. *Désignons leurs modules respectivement par* $|\vec{a}|$ *et* $|\alpha|$. *On appelle produit* $\alpha\vec{a}$ (*ou* $\vec{a}\alpha$) *le vecteur colinéaire au vecteur* $\vec{a}$, *de longueur* $|\vec{a}| \cdot |\alpha|$, *de même sens que le vecteur* $\vec{a}$ *si* $\alpha > 0$ *et de sens contraire si* $\alpha < 0$.

L'opération qui consiste à tracer le vecteur $\alpha\vec{a}$ est appelée *multiplication du vecteur $\vec{a}$ par le nombre α.*

Remarque 1. Si $\vec{a} = 0$ ou $\alpha = 0$ le produit a un module nul et est, par conséquent, un vecteur nul. Dans ce cas la direction du produit $\alpha\vec{a}$ est indéterminée.

Remarque 2. On peut exprimer le sens de l'opération de multiplication d'un vecteur par un nombre de la façon suivante: lorsque l'on multiplie le vecteur $\vec{a}$ par un nombre α, le vecteur $\vec{a}$ s'allonge α fois. Il est évident que cet énoncé est conventionnel. Par exemple, si $\alpha = 1/2$ l'« allongement » α fois signifie une réduction de moitié de la longueur $\vec{a}$. Si le nombre α est négatif il convient de comprendre l'allongement α fois comme une transformation du vecteur à la suite de laquelle le vecteur s'allonge $|\alpha|$ fois (« module α fois ») et son sens devient opposé.

§ 52. PROPRIÉTÉS PRINCIPALES DES OPÉRATIONS LINÉAIRES

162. Nous allons établir à présent les propriétés essentielles des opérations linéaires que l'on utilise dans le calcul vectoriel.

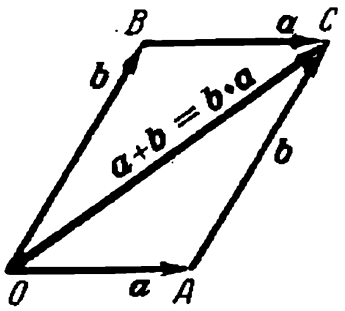


Fig. 87

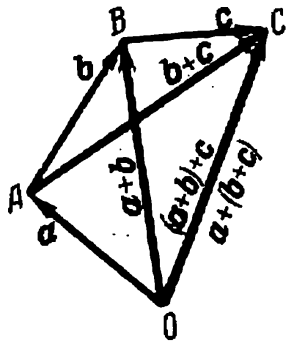


Fig. 88

Nous montrerons tout d'abord que *la somme de deux vecteurs quelconques ne dépend pas de l'ordre des termes.*

Nous considérerons à cet effet deux vecteurs quelconques $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Etant donné que les vecteurs géométriques sont des vecteurs libres, nous pouvons appliquer $\vec{a}$ et $\vec{b}$ au même point O en choisissant ce dernier arbitrairement. Désignons les extrémités des vecteurs ainsi disposés par les lettres A et B (fig. 87). Appliquons à présent le vecteur $\vec{b}$ au point A, désignons par C son extrémité dans sa nouvelle position et joignons par un segment le point B au point C. Il est

évident que le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a la même longueur et la même direction que le vecteur $\overrightarrow{OA}$. Donc $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$.

Si nous considérons la figure OAC en tenant compte de la règle d'addition des vecteurs (« règle du triangle ») nous trouvons que $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$. D'autre part, dans la figure OBC, d'après la même règle, nous trouvons que $\overrightarrow{OC} = \vec{b} + \vec{a}$. D'où

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \tag{1}$$

ce qu'il fallait démontrer.

La propriété de l'addition des vecteurs qui s'exprime par l'identité (1) est dite *commutative*.

R e m a r q u e. On appelle la figure $OABC$ *parallélogramme construit sur les vecteurs* $\vec{a}$, $\vec{b}$ de même origine O et le vecteur $\overrightarrow{OC}$ est appelé diagonale de ce parallélogramme (on use de ces termes même quand $\vec{a} = \overline{OA}$ et $\vec{b} = \overline{OB}$ sont portés par la même droite, c'est-à-dire quand $OABC$ n'est pas un parallélogramme dans le sens propre du terme). En vertu de ce qui vient d'être exposé, on peut énoncer la règle d'addition des vecteurs sous la nouvelle forme suivante:

Si les vecteurs $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *sont ramenés à la même origine et si l'on construit sur ces vecteurs un parallélogramme, la somme* $\vec{a} + \vec{b}$ *(ou* $\vec{b} + \vec{a}$*) est la diagonale de ce parallélogramme issue de l'origine commune de* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$.

La règle d'addition énoncée de cette façon est dite « règle du parallélogramme ».

163. Une fois la somme de deux vecteurs définie, on peut définir d'une façon naturelle la somme d'un nombre quelconque de vecteurs.

Soient par exemple trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$. Par addition de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ nous obtiendrons le vecteur $\vec{a} + \vec{b}$. Additionnons à présent $\vec{c}$. Nous obtenons le vecteur $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$. Nous pouvons également construire le vecteur $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, autrement dit nous pouvons ajouter la somme $\vec{b} + \vec{c}$ au vecteur $\vec{a}$.

Il est facile de se convaincre que *quels que soient les trois vecteurs* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *et* $\vec{c}$ *l'égalité suivante est toujours vraie*:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \tag{2}$$

La propriété de l'addition des vecteurs exprimée par l'identité (2) est dite *associative*.

Pour démontrer que l'addition est associative, disposons les vecteurs considérés de façon que le vecteur $\vec{b}$ soit appliqué à l'extrémité du vecteur $\vec{a}$ et le vecteur $\vec{c}$ à l'extrémité du vecteur $\vec{b}$. Nous désignerons dans cette configuration l'origine du vecteur $\vec{a}$ par O, son extrémité par la lettre A, l'extrémité du vecteur $\vec{b}$ par B, l'extrémité du vecteur $\vec{c}$ par C (fig. 88). Nous aurons alors

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}.$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

Par conséquent,

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous appuyant sur l'associativité de l'addition des vecteurs, nous pouvons parler de la somme de trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ en l'inscrivant $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ sans spécifier si nous avons en vue $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ ou $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. On peut définir de façon analogue la somme de quatre, cinq et en général d'un nombre quelconque de vecteurs.

En pratique il n'est pas nécessaire de tracer successivement les sommes de plusieurs vecteurs en fixant les résultats intermédiaires. La somme de plusieurs vecteurs peut être tracée directement à l'aide de la règle suivante.

Règle générale d'addition des vecteurs. *Pour obtenir la somme de vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ il faut appliquer le vecteur $\vec{a}_2$ à l'extrémité du vecteur $\vec{a}_1$, le vecteur $\vec{a}_3$ à l'extrémité du vecteur $\vec{a}_2$, et ainsi de suite jusqu'au vecteur $\vec{a}_n$. La somme de vecteurs $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\ldots+\vec{a}_n$ sera alors le vecteur allant de l'origine du vecteur $\vec{a}_1$ à l'extrémité du vecteur $\vec{a}_n$.*

Désignons par la lettre O l'origine du vecteur $\vec{a}_1$, par les lettres $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les extrémités respectives des vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ disposés comme l'indique la règle précitée. La figure $OA_1A_2\ldots A_n$ est appelée ligne brisée à éléments vectoriels $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}_1$, $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}_2, \ldots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{a}_n$. Le vecteur $\overrightarrow{OA_n}$ est dit vecteur de fermeture de la ligne brisée $OA_1A_2\ldots A_n$. Etant donné que

$$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n,$$

on dit que *la construction de la somme de plusieurs vecteurs se fait par fermeture de la ligne brisée* (la fig. 89 représente la construction de la somme de quatre termes).

Remarque. Au n° 162 nous avons établi que la somme de deux vecteurs ne dépend pas de l'ordre des termes. Il en découle,

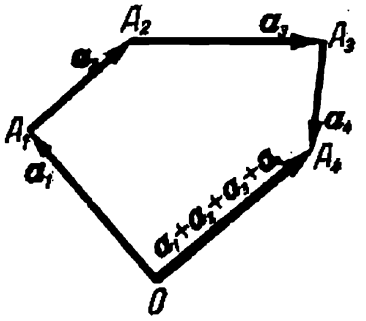


Fig. 89

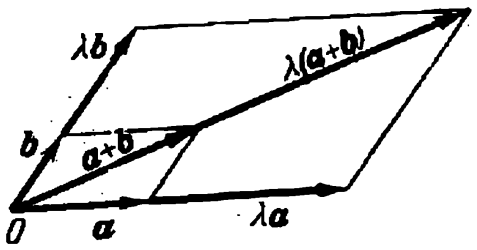


Fig. 90

ainsi que de l'associativité de l'addition des vecteurs, que *la somme d'un nombre quelconque de vecteurs ne dépend pas de l'ordre de l'addition.*

164. Nous allons noter à présent trois propriétés des opérations linéaires qui se rapportent simultanément à l'addition des vecteurs et à la multiplication d'un vecteur par un nombre.

Ces propriétés s'expriment à l'aide des trois identités suivantes, où λ et μ désignent des nombres quelconques, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ des vecteurs quelconques:

$$1) \quad (\lambda+\mu)\,\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a},$$

$$2) \quad \lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\,\vec{a},$$

$$3) \quad \lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

Il devient évident que la première identité est vraie si on l'exprime en termes géométriques. En effet, si l'on allonge un vecteur $\vec{a}$ $\lambda+\mu$ fois, on obtient le même vecteur que par addition du vecteur $\vec{a}$ allongé λ fois avec le vecteur $\vec{a}$ allongé μ fois *.

La deuxième identité a un sens géométrique tout aussi clair: si l'on allonge un vecteur $\vec{a}$ μ fois, puis λ fois on obtient le même vecteur qu'en allongeant le vecteur $\vec{a}$ $\lambda\mu$ fois.

---

* Il convient de comprendre « allongement » comme indiqué remarque 2, n° 161.

La troisième identité découle de la similitude des polygônes. En effet, le vecteur $\vec{a} + \vec{b}$ est la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (en supposant que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ soient reportés à la même origine). En allongeant les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{a} + \vec{b}$ λ fois on obtient un parallélogramme semblable au premier. $\lambda(\vec{a} + \vec{b})$ est donc la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs $\lambda\vec{a}$ et $\lambda\vec{b}$, d'où $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (voir fig. 90 pour le cas où $\lambda > 0$. Tous les vecteurs représentés sur cette figure sont considérés comme appliqués au point O).

Les propriétés des opérations linéaires que nous venons d'énoncer ont une importance fondamentale car elles nous permettent d'effectuer les calculs en algèbre vectorielle comme nous le faisons en algèbre des nombres. La première propriété indique la possibilité de « distribuer » le facteur vectoriel entre les composantes du facteur numérique, la troisième de « distribuer » un facteur numérique entre les composantes vectorielles. C'est pourquoi ces deux propriétés sont dites « distributives ». On dit que la multiplication est distributive.

La deuxième propriété nous donne la possibilité « d'associer » les produits numériques lors de la multiplication successive d'un vecteur par plusieurs nombres (par exemple, $2(5\vec{a}) = 10\vec{a}$). C'est pourquoi on appelle la deuxième propriété *associativité*.

§ 53. DIFFÉRENCE DE VECTEURS

165. On introduit dans l'algèbre vectorielle l'opération de soustraction des vecteurs; comme en arithmétique, c'est l'opération contraire à l'addition.

Soient deux vecteurs quelconques $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On appelle différence $\vec{b} - \vec{a}$ le vecteur qui ajouté à $\vec{a}$ donne $\vec{b}$.

Appliquons les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ à une origine commune O, après quoi nous désignerons leurs extrémités par A et B (fig. 91). Cherchons la différence $\vec{b} - \vec{a}$. Admettons que ce vecteur que nous cherchons soit appliqué au point A. Son extrémité doit alors coïncider avec le point B, car additionné au vecteur $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ il doit nous donner le vecteur $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.

Par conséquent, la différence $\vec{b} - \vec{a}$ n'est rien d'autre que le vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}.$$

Ainsi donc, *la différence de deux vecteurs ramenés à une origine commune est le vecteur qui joint l'extrémité du vecteur « retranché » à l'extrémité du vecteur « diminué ».*

166. En plus du vecteur quelconque $\vec{a}$ considérons le vecteur $(-1)\,\vec{a}$. *On appelle le vecteur* $(-1)\,\vec{a}$ *vecteur opposé à* $\vec{a}$ *et on le désigne par* $-\vec{a}$

$$-\vec{a} = (-1)\,\vec{a}.$$

Etant donné qu'en multipliant $\vec{a}$ par -1 on obtient un vecteur de même module, colinéaire au vecteur $\vec{a}$ mais de sens contraire

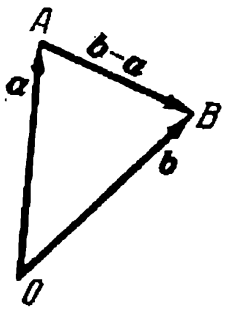


Fig. 91

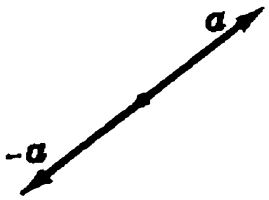


Fig. 92

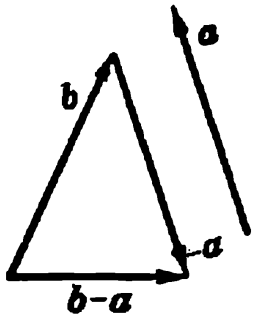


Fig. 93

(fig. 92), on appelle aussi parfois les vecteurs $\vec{a}$ et $-\vec{a}$ opposés.

Si nous appliquons le vecteur $-\vec{a}$ à l'extrémité du vecteur $\vec{a}$ l'extrémité du vecteur $-\vec{a}$ se confondra avec l'origine du vecteur $\vec{a}$.

Par conséquent, $\vec{a} + (-\vec{a})$ est un vecteur nul:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0. \qquad (1)$$

167. Considérons de nouveau deux vecteurs quelconques $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Il découle directement de l'identité (1) que

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a}). \qquad (2)$$

En effet,

$$\vec{a} + [\vec{b} + (-\vec{a})] = \vec{b} + [\vec{a} + (-\vec{a})] = \vec{b} + 0 = \vec{b};$$

par conséquent, la somme de $\vec{b} + (-\vec{a})$ et du vecteur $\vec{a}$ est égale au vecteur $\vec{b}$, ce qui signifie que le vecteur $\vec{b} + (-\vec{a})$ est la différence $\vec{b} - \vec{a}$.

L'égalité (2) exprime une nouvelle règle de soustraction: *pour obtenir la différence* $\vec{b} - \vec{a}$ *il faut ajouter au vecteur* $\vec{b}$ *le vecteur* $-\vec{a}$

(fig. 93; la figure nous montre clairement de plus que la somme des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b} + (-\vec{a})$ est le vecteur $\vec{b}$). Cette dernière règle est particulièrement commode pour le tracé du résultat de l'addition et de la soustraction de plusieurs vecteurs. Par exemple, pour trouver $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} + \vec{d} - \vec{e}$ il suffit de prendre les vecteurs $\vec{a}$, $-\vec{b}$, $-\vec{c}$, $\vec{d}$, $-\vec{e}$ et de tracer leur somme comme indiqué au n° 163.

§ 54. PRINCIPAUX THÉORÈMES SUR LES PROJECTIONS

168. Nous allons énoncer à présent deux théorèmes importants sur les projections de vecteurs.

Théorème 17. *La projection de la somme de plusieurs vecteurs est égale à la somme des projections de ces vecteurs* (sur le même axe):

$$\mathrm{Proj}_u(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \ldots + \vec{a}_n) = \mathrm{Proj}_u \vec{a}_1 + \mathrm{Proj}_u \vec{a}_2 + \\ + \mathrm{Proj}_u \vec{a}_3 + \ldots + \mathrm{Proj}_u \vec{a}_n.$$

Démonstration. Traçons la ligne brisée composée des segments des vecteurs $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ (voir n° 163), autrement dit appliquons le vecteur $\vec{a}_2$ à l'extrémité du vecteur $\vec{a}_1$, le vecteur $\vec{a}_3$ à l'extrémité du vecteur $\vec{a}_2$, et ainsi de suite et appliquons enfin le vecteur $\vec{a}_n$ à l'extrémité du vecteur $\vec{a}_{n-1}$. Les vecteurs étant ainsi disposés, désignons par O l'origine du vecteur $\vec{a}_1$, son extrémité par A_1, l'extrémité du vecteur $\vec{a}_2$ par A_2, etc.
Nous aurons alors:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \ldots + \vec{a}_n = \overrightarrow{OA}_n. \qquad (1)$$

Projetons les points O, A_1, A_2, A_3, ..., A_n sur l'axe u et désignons leurs projections respectives par O', A'_1, A'_2, ..., A'_n (voir fig. 94 qui correspond au cas où $n = 3$). Il vient:

$$O'A'_1 = \mathrm{Proj}_u \vec{a}_1;\ A'_1A'_2 = \mathrm{Proj}_u \vec{a}_2;\ \ldots;\ A'_{n-1}A'_n = \mathrm{Proj}_u \vec{a}_n. \qquad (2)$$

D'autre part, en vertu de l'égalité (1),

$$\mathrm{Proj}_u(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \ldots + \vec{a}_n) = \mathrm{Proj}_u \overrightarrow{OA}_n = O'A'_n. \qquad (3)$$

Mais conformément au n° 3 quelle que soit la disposition sur l'axe u des points O', A'_1, A'_2, ..., A'_n l'identité suivante est vraie:

$$O'A'_n = O'A'_1 + A'_1A'_2 + A'_2A'_3 + \ldots + A'_{n-1}A'_n. \qquad (4)$$

En vertu de (4) et tenant compte des formules (2) et (3) on aura : $\mathrm{Proj}_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n)=\mathrm{Proj}_u\vec{a}_1+\mathrm{Proj}_u\vec{a}_2+\ldots+\mathrm{Proj}_u\vec{a}_n$. Le théorème est démontré.

Théorème 18. *Lorsque l'on multiplie un vecteur par un nombre sa projection se trouve multipliée par le même nombre*

$$\mathrm{Proj}_u\,\alpha\vec{a}=\alpha\,\mathrm{Proj}_u\,\vec{a}.$$

Démonstration. Admettons que le vecteur $\vec{a}$ soit appliqué en un point quelconque O de l'axe u. Désignons son extrémité

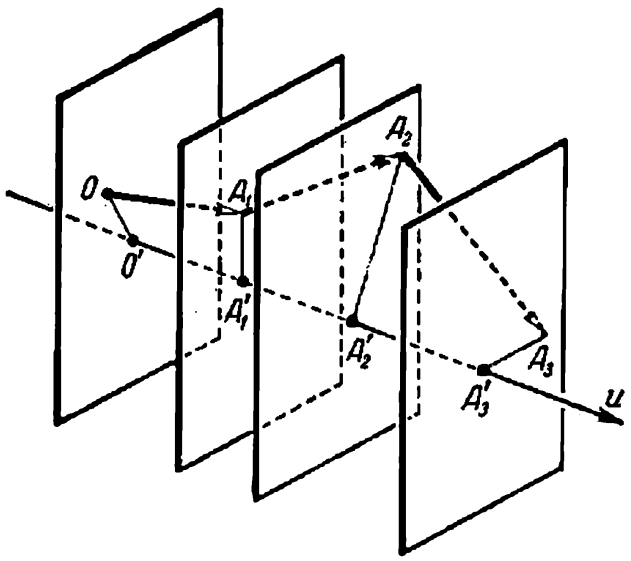


Fig. 94

par la lettre A. Nous supposerons le vecteur $\alpha\vec{a}$ également appliqué au point O et nous désignerons son extrémité par la lettre B. Ainsi donc, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\alpha\vec{a}$.

Considérons à présent la droite v, sur laquelle se trouvent les points O, A et B. Choisissons sur cette droite un sens positif (quelconque) ; nous en ferons ainsi un axe.

Projetons les points O, A et B sur l'axe u. Soient O', A' et B' leurs projections (fig. 95,*a* et *b*). En vertu d'un théorème de géométrie élémentaire nous aurons la proportion :

$$\frac{|O'B'|}{|O'A'|}=\frac{|OB|}{|OA|}. \qquad (5)$$

Si les segments $\overline{OB}$ et $\overline{OA}$ (de l'axe v) sont orientés dans le même sens, les segments $\overline{O'B'}$ et $\overline{O'A'}$ de l'axe u seront également orientés dans le même sens ; si, par contre, les segments $\overline{OB}$ et $\overline{OA}$ sont orientés en sens contraires, il en sera de même des segments $\overline{O'B'}$ et $\overline{O'A'}$ (ce qui se produira si α est négatif ; c'est le cas de la fig. 95,*b*). Par

conséquent, les rapports des segments $\frac{O'B'}{O'A'}$ et $\frac{OB}{OA}$ ont même signe. L'égalité (5) est donc remplacée par la suivante:

$$\frac{O'B'}{O'A'} = \frac{OB}{OA}.$$

Etant donné que $\overline{OB} = \alpha\vec{a}$ et $\overline{OA} = \vec{a}$, $\frac{OB}{OA} = \alpha$. D'où $\frac{O'B'}{O'A'} = \alpha$ ou encore $O'B' = \alpha \cdot O'A'$. Donc

$$\mathrm{Proj}_u\, \alpha\vec{a} = \alpha\, \mathrm{Proj}_u\, \vec{a}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

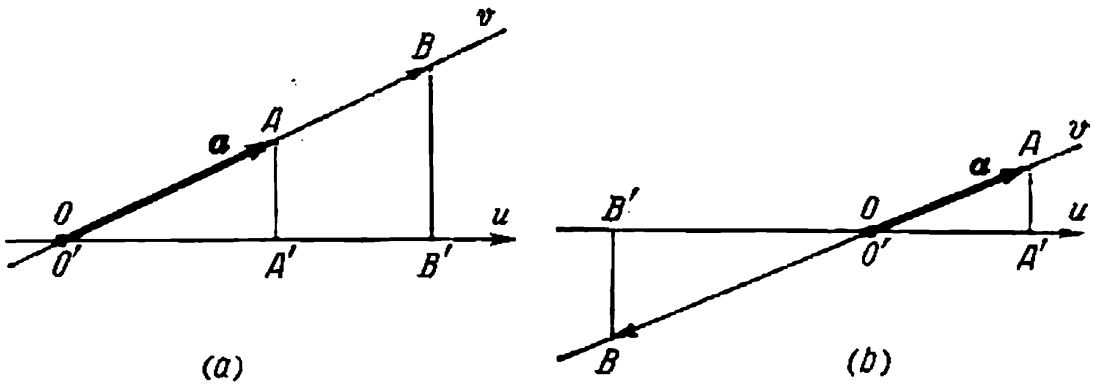


Fig. 95

R e m a r q u e. On pourrait énoncer ce dernier théorème d'une façon plus accessible comme suit: *lorsque le vecteur* $\vec{a}$ *s'allonge* α *fois, sa projection s'allonge également* α *fois.*

169. Nous avons établi au n° 150 le principe qui permet de définir tout vecteur libre dans l'espace en donnant trois nombres qui sont ses coordonnées. Il nous importe de savoir *quelles sont les opérations arithmétiques sur les coordonnées des vecteurs qui correspondent aux opérations linéaires effectuées avec les vecteurs eux-mêmes.* Cette question est résolue par les théorèmes 17 et 18 du n° 168, si nous considérons que les coordonnées des vecteurs sont les projections de ces vecteurs sur les axes de coordonnées. Ainsi, par exemple, le théorème 17 nous indique que *lors de l'addition des vecteurs leurs coordonnées s'ajoutent.* Par conséquent, si

$$\vec{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\} \text{ et } \vec{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},$$

donc

$$\vec{a} + \vec{b} = \{X_1 + X_2;\ Y_1 + Y_2;\ Z_1 + Z_2\}.$$

Il en découle que

$$\vec{a} - \vec{b} = \{X_1 - X_2;\ Y_1 - Y_2;\ Z_1 - Z_2\}.$$

On peut exprimer symboliquement cette relation par une seule expression :

$$\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\} \pm \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\} = \{X_1 \pm X_2;\ Y_1 \pm Y_2;\ Z_1 \pm Z_2\}. \quad (6)$$

Ensuite, en vertu du théorème 18 lorsque l'on multiplie un vecteur par un nombre ses coordonnées sont multipliées par le même nombre. Autrement dit, si $\vec{a} = \{X;\ Y;\ Z\}$, nous aurons pour tout nombre α

$$\alpha\vec{a} = \{\alpha X;\ \alpha Y;\ \alpha Z\},$$

ce qui peut s'exprimer symboliquement de la façon suivante :

$$\alpha\{X;\ Y;\ Z\} = \{\alpha X;\ \alpha Y;\ \alpha Z\}. \quad (7)$$

170. Il est facile de déduire de ce qui précède *la condition qui doit être remplie pour que deux vecteurs soient colinéaires*, ces vecteurs étant définis par leurs coordonnées.

Les vecteurs $\vec{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ et $\vec{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$ sont colinéaires si et seulement si l'un d'eux peut être obtenu par multiplication de l'autre par un nombre quelconque : $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ (en supposant $\vec{a} \neq 0$). L'égalité vectorielle

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}$$

est équivalente à trois égalités numériques

$$X_2 = \lambda X_1, \quad Y_2 = \lambda Y_1, \quad Z_2 = \lambda Z_1.$$

Ces dernières égalités indiquent que les coordonnées du vecteur $\vec{b}$ sont proportionnelles aux coordonnées du vecteur $\vec{a}$. Donc les *vecteurs* $\vec{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ et $\vec{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$ *sont colinéaires si et seulement si*

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1},$$

c'est-à-dire si leurs coordonnées sont proportionnelles.

§ 55. DÉVELOPPEMENT DES VECTEURS SELON LES VECTEURS UNITAIRES DES AXES DE COORDONNÉES DANS L'ESPACE

171. Soit un système de coordonnées cartésiennes orthogonales dans l'espace. Considérons en même temps les trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ définis comme suit :

1) le vecteur $\vec{i}$ se trouve sur l'axe Ox, le vecteur $\vec{j}$ sur l'axe Oy et le vecteur $\vec{k}$ sur l'axe Oz,

2) chacun des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ est orienté sur son axe dans le sens positif,

3) les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont des vecteurs unités, c'est-à-dire que $|\vec{i}| = 1$, $|\vec{j}| = 1$, $|\vec{k}| = 1$.

Il apparaît que tout vecteur dans l'espace peut être exprimé à l'aide des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ au moyen d'opérations linéaires.

Nous allons montrer tout à l'heure comment cette expression est obtenue.

Considérons un vecteur quelconque $\vec{a}$. Supposons pour la commodité de l'exposé qu'il soit appliqué à l'origine des coordonnées. Désignons l'extrémité du vecteur $\vec{a}$ par la lettre A. Traçons par le point A une droite parallèle à l'axe Oz. Cette droite doit percer le plan Oxy. Désignons le point d'intersection par B. Traçons ensuite par le point B une droite parallèle à l'axe Oy et une droite parallèle à l'axe Ox. La première doit couper l'axe Ox, la deuxième l'axe Oy. Désignons ces points d'intersection respectivement par les symboles A_x et A_y. Traçons enfin par le point A une droite parallèle à la droite OB. Cette droite doit couper l'axe Oz en un point que nous désignerons par le symbole A_z (fig. 96).

En vertu de la règle d'addition des vecteurs (appliquée au parallélogramme $OBAA_z$), nous avons:

$$\vec{a} = \vec{OB} + \vec{OA}_z. \tag{1}$$

Conformément à la même règle d'addition (appliquée au parallélogramme OA_yBA_x),

$$\vec{OB} = \vec{OA}_x + \vec{OA}_y. \tag{2}$$

En vertu des égalités (1) et (2) nous aurons:

$$\vec{a} = \vec{OA}_x + \vec{OA}_y + \vec{OA}_z. \tag{3}$$

Etant donné que les vecteurs $\vec{OA}_x$ et $\vec{i}$ sont portés par la même droite, $\vec{OA}_x$ peut être obtenu à partir de $\vec{i}$ par « allongement » du vecteur $\vec{i}$. On peut donc poser $\vec{OA}_x = \lambda\vec{i}$, λ étant un nombre déterminé.

De même $\vec{OA}_y = \mu\vec{j}$ et $\vec{OA}_z = \nu\vec{k}$ (le tracé fig. 96 correspond au cas où λ, μ et ν sont positifs).

Nous obtenons de l'égalité (3) et des relations $\vec{OA}_x = \lambda\vec{i}$, $\vec{OA}_y = \mu\vec{j}$, $\vec{OA}_z = \nu\vec{k}$,

$$\vec{a} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + \nu\vec{k}. \tag{4}$$

Nous avons ainsi montré que tout vecteur dans l'espace peut effectivement être exprimé à l'aide des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

Ayant en vue d'exprimer tous les vecteurs de l'espace à l'aide des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ nous appellerons l'ensemble de ces trois vecteurs *base*.

On appelle développement d'un vecteur $\vec{a}$ *en fonction de la base* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ *l'opération qui consiste à représenter ce vecteur* $\vec{a}$ *sous forme*

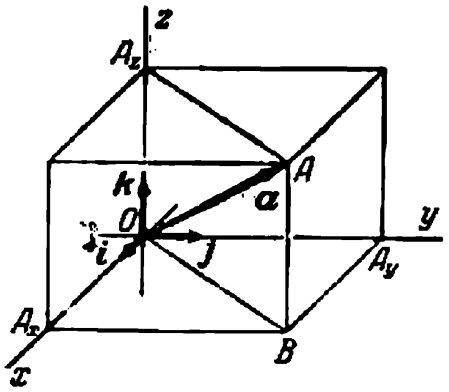


Fig. 96

d'une somme $\lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + \nu\vec{k}$. Les nombres λ, μ, ν sont appelés *coefficients* de ce développement, les vecteurs $\lambda\vec{i}$, $\mu\vec{j}$, $\nu\vec{k}$ sont dits *composantes* du vecteur $\vec{a}$ par rapport à la base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Les vecteurs $\lambda\vec{i}$, $\mu\vec{j}$, $\nu\vec{k}$ sont appelés composantes du vecteur $\vec{a}$ car leur somme est égale au vecteur $\vec{a}$.

172. Nous allons essayer à présent de dégager le sens géométrique des coefficients λ, μ, ν. Etant donné que $\overrightarrow{OA}_x = \lambda\vec{i}$ et que $\vec{i}$ est un vecteur unité, le nombre λ est le rapport du segment $\overline{OA}_x$ à l'unité de mesure, pris avec le signe + ou — suivant que le vecteur est de même orientation ou d'orientation contraire à $\vec{i}$. Autrement dit, λ est la grandeur du segment $\overline{OA}_x$ sur l'axe Ox, dans le sens qui est déterminé au n° 2, c'est-à-dire que $\lambda = OA_x$. Mais OA_x n'est rien d'autre que la projection du vecteur $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ sur l'axe Ox. Par conséquent,

$$\lambda = \mathrm{Proj}_x \vec{a} = X.$$

D'une manière analogue

$$\mu = \mathrm{Proj}_y \vec{a} = Y, \quad \nu = \mathrm{Proj}_z \vec{a} = Z.$$

173. Nous pouvons résumer tout ce que nous avons exposé plus haut par le théorème suivant.

Théorème 19. *Quel que soit le vecteur* $\vec{a}$ *il peut toujours être développé en fonction de la base* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, c'est-à-dire représenté sous la forme

$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k};$$

les coefficients de ce développement sont déterminés par le vecteur $\vec{a}$ *d'une façon univoque. En d'autres termes,* X, Y, Z *sont les projections du vecteur* $\vec{a}$ *sur les axes de coordonnées* (c'est-à-dire les coordonnées du vecteur $\vec{a}$).

174. Il est à noter que l'on peut développer des vecteurs non seulement en fonction de la base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Soient trois vecteurs $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$. Pour plus de clarté imaginons qu'ils sont appliqués à l'origine commune O. Nous ne faisons aucune supposition spéciale quant à ces vecteurs (leurs longueurs et les angles d'inclinaison l'un par rapport à l'autre pouvant être arbitraires). Une seule condition doit être observée, notamment qu'étant appliqués à l'origine commune O, les vecteurs $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ ne doivent pas être situés dans le même plan. Cette condition étant respectée on peut énoncer le théorème suivant :

Quel que soit le vecteur $\vec{a}$ *il peut toujours être exprimé sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs* $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$

$$\vec{a} = \lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2 + \nu\vec{a}_3. \qquad (5)$$

Cette expression du vecteur $\vec{a}$ est appelée le développement du vecteur $\vec{a}$ en fonction de la base $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$.

Pour démontrer le théorème énoncé menons par le point O trois axes Ox, Oy, Oz suivant les directions respectives des vecteurs $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$. L'égalité (5) peut alors être obtenue en reprenant les calculs et les raisonnements qui nous ont permis de prouver l'égalité (4).

Il suffit de remplacer partout $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ par $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ (le parallélépipède de la fig. 96 n'aura pas dans ce cas la forme rectangulaire).

Il nous reste à élucider la signification géométrique des coefficients λ, μ, ν de l'égalité (5). Nous avons : $\overline{OA}_x = \lambda\vec{a}_1$; il s'ensuit que λ est la grandeur du segment $\overline{OA}_x$ de l'axe Ox si le vecteur $\vec{a}_1$ est pris sur cet axe comme segment unitaire. μ et ν ont une signification analogue. Les segments $\overline{OA}_x$, $\overline{OA}_y$, $\overline{OA}_z$ sont parfois nommés projections obliques du vecteur $\vec{a}$ sur les axes Ox, Oy, Oz. De même

les coefficients λ, μ, ν de l'égalité (5) sont les grandeurs des projections obliques du vecteur $\vec{a}$ sur les axes Ox, Oy, Oz, chaque projection étant mesurée à l'échelle correspondante de son axe. Il en résulte que les coefficients du développement d'un vecteur en fonction de la base choisie sont déterminés d'une manière univoque (car ils représentent des grandeurs géométriques bien définies).

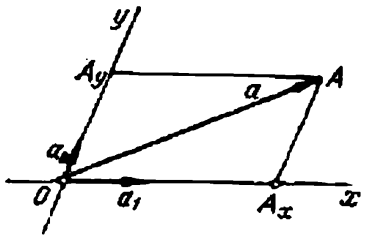


Fig. 96,a

175. Si le vecteur $\vec{a}$ est situé dans le plan des vecteurs $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ son développement en fonction de la base $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ prend la forme:

$$\vec{a} = \lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2,$$

c'est-à-dire, $\nu = 0$. En effet, dans ce cas le point A coïncide avec le point B et par conséquent $\overline{OA}_z = 0$.

Si nous n'étudions que des vecteurs situés dans un même plan et si nous ne développons en fonction de la base que ces vecteurs, il sera suffisant de choisir la base constituée par deux vecteurs $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ appartenant au plan donné (le troisième vecteur devient inutile). En tant que base on peut prendre toute paire des vecteurs $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ du plan donné; toutefois ils doivent absolument satisfaire à la condition suivante: étant appliqués à l'origine commune O les vecteurs $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ ne doivent pas se trouver sur une même droite. Autrement dit, la base dans le plan est obligatoirement constituée par des vecteurs non colinéaires. La construction des composantes est naturellement plus simple dans le plan que dans l'espace (fig. 96, *a*). Nous avons:

$$\vec{a} = \vec{OA} = \vec{OA}_x + \vec{OA}_y = \lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2.$$

Les segments $\overline{OA}_x$, $\overline{OA}_y$ sont des projections obliques du vecteur $\vec{a}$ sur les axes Ox, Oy les coefficients λ et μ représentant leurs grandeurs lorsqu'en tant que segments unitaires on choisit sur les axes correspondants les vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$.

CHAPITRE IX

PRODUIT SCALAIRE DES VECTEURS

§ 56. LE PRODUIT SCALAIRE ET SES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

176. *On appelle produit scalaire de deux vecteurs un nombre égal au produit des modules de ces vecteurs par le cosinus de l'angle formé par ces vecteurs.*

On désigne le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ par le symbole $\vec{a}\vec{b}$.

Désignons par φ l'angle de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Nous pourrons alors exprimer le produit scalaire de ces deux vecteurs par la formule

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi. \tag{1}$$

Il est important de remarquer pour ce qui suivra que $|\vec{b}| \cos\varphi = \text{Proj}_a \vec{b}$ (voir n° 148). Par conséquent,

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{Proj}_a \vec{b}. \tag{2}$$

De même, $|\vec{a}| \cdot \cos\varphi = \text{Proj}_b \vec{a}$ et nous aurons aussi

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Proj}_b \vec{a}. \tag{3}$$

Ainsi donc, *le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ peut être considéré soit comme le produit de deux nombres dont l'un est le module du vecteur $\vec{a}$ et l'autre la projection du vecteur $\vec{b}$ sur l'axe du vecteur $\vec{a}$, soit comme le produit de deux nombres dont l'un est le module du vecteur $\vec{b}$ et l'autre la projection du vecteur $\vec{a}$ sur l'axe du vecteur $\vec{b}$.*

177. Il faut chercher l'origine du concept de produit scalaire dans la mécanique. En effet, si le vecteur (libre) $\vec{a}$ représente une force dont le point d'application se déplace de l'origine vers l'extrémité du vecteur $\vec{b}$, le travail w de cette force est déterminé par l'égalité

$$w = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

En calcul vectoriel on appelle cette grandeur p r o d u i t de deux vecteurs du fait qu'elle possède certaines propriétés algébriques d'un produit ordinaire de nombres (qui seront indiquées au para-

graphe suivant). On appelle cette grandeur produit scalaire car elle est un scalaire (un nombre).

178. Le produit scalaire possède les propriétés algébriques suivantes.

1. Commutativité des facteurs:

$$\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}.$$

Démonstration. Par définition $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ et $\vec{b}\vec{a} = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$. Or $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}|$, car c'est un simple produit de nombres et, par conséquent, $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$.

2. Associativité par rapport à la multiplication par un nombre:

$$(\alpha\vec{a})\,\vec{b} = \alpha\,(\vec{a}\,\vec{b}).$$

Démonstration. En vertu de la formule (3) nous avons

$$(\alpha\vec{a})\,\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \mathrm{Proj}_b\,(\alpha\vec{a}).$$

Mais le théorème 18 (n° 168) indique que $\mathrm{Proj}_b\,(\alpha\vec{a}) = \alpha\,\mathrm{Proj}_b\,\vec{a}$. Ainsi donc,

$$(\alpha\vec{a})\,\vec{b} = |\vec{b}|\,\mathrm{Proj}_b\,(\alpha\vec{a}) = |\vec{b}| \cdot \alpha\,\mathrm{Proj}_b\,\vec{a} = \alpha\,(|\vec{b}| \cdot \mathrm{Proj}_b\,\vec{a}).$$

D'autre part, cette même formule (3) nous donne $|\vec{b}| \cdot \mathrm{Proj}_b\,\vec{a} = \vec{a}\,\vec{b}$. Par conséquent,

$$(\alpha\vec{a})\,\vec{b} = \alpha\,(|\vec{b}|\,\mathrm{Proj}_b\,\vec{a}) = \alpha\,(\vec{a}\,\vec{b}).$$

Remarque 1. Il découle des propriétés 1 et 2 que

$$(\alpha\vec{a})\,(\beta\vec{b}) = (\alpha\beta)\,(\vec{a}\,\vec{b}).$$

En effet,

$$(\alpha\vec{a})\,(\beta\vec{b}) = \alpha\,[\vec{a}\,(\beta\vec{b})] = \alpha\,[(\beta\vec{b})\,\vec{a}] = \alpha\,[\beta\,(\vec{b}\,\vec{a})] = (\alpha\beta)\,(\vec{b}\,\vec{a}) = (\alpha\beta)\,(\vec{a}\,\vec{b}).$$

3. Distributivité par rapport à l'addition:

$$\vec{a}\,(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}.$$

Démonstration. En vertu de la formule (2) nous avons:

$$\vec{a}\,(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|\,\mathrm{Proj}_a\,(\vec{b} + \vec{c}).$$

Mais d'après le théorème 17 (n° 168) $\mathrm{Proj}_a\,(\vec{b} + \vec{c}) = \mathrm{Proj}_a\,\vec{b} + \mathrm{Proj}_a\,\vec{c}$. Donc

$$\vec{a}\,(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot \mathrm{Proj}_a\,(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot (\mathrm{Proj}_a\,\vec{b} + \mathrm{Proj}_a\,\vec{c}) =$$
$$= |\vec{a}| \cdot \mathrm{Proj}_a\,\vec{b} + |\vec{a}| \cdot \mathrm{Proj}_a\,\vec{c}.$$

D'autre part, toujours en vertu de la formule (2) $|\vec{a}|\cdot \mathrm{Proj}_a \vec{b} = \vec{a}\vec{b}$, $|\vec{a}|\cdot \mathrm{Proj}_a \vec{c} = \vec{a}\vec{c}$. Par conséquent,

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\,\mathrm{Proj}_a \vec{b} + |\vec{a}|\,\mathrm{Proj}_a \vec{c} = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}.$$

La dernière propriété que nous avons démontrée nous donne le droit d'effectuer la multiplication scalaire des vecteurs terme par terme. Compte tenu de la première propriété, on peut ne pas se préoccuper de l'ordre des facteurs. La deuxième propriété nous permet alors (voir remarque 1) de grouper les coefficients des facteurs vectoriels. Par exemple,

$$(2\vec{a}+5\vec{b})(3\vec{c}+4\vec{d}) = (2\vec{a}+5\vec{b})(3\vec{c}) + (2\vec{a}+5\vec{b})(4\vec{d}) = (2\vec{a})(3\vec{c}) +$$

$$+ (5\vec{b})(3\vec{c}) + (2\vec{a})(4\vec{d}) + (5\vec{b})(4\vec{d}) = 6\vec{a}\vec{c} + 15\vec{b}\vec{c} + 8\vec{a}\vec{d} + 20\vec{b}\vec{d}.$$

Remarque 2. Il est un aspect du produit scalaire qui le distingue substantiellement du produit ordinaire de deux nombres: étant donné que le produit scalaire de deux vecteurs est non plus un vecteur mais un nombre, il serait inutile de parler du produit scalaire de trois facteurs vectoriels ou plus. Remarquons que l'on ne peut comprendre le symbole $(\vec{a}\vec{b})\,\vec{c}$ que comme suit: $(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$ est le produit du nombre $(\vec{a}\vec{b})$ et du vecteur $\vec{c}$, autrement dit $(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$ est le vecteur $\vec{c}$ « allongé » $\vec{a}\vec{b}$ fois.

179. Nous allons énoncer à présent plusieurs propriétés géométriques importantes du produit scalaire:

1. *Si les vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment un angle aigu, le produit scalaire $\vec{a}\vec{b}$ est positif.*

En effet, si φ est un angle aigu $\cos\varphi > 0$. Donc,

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi > 0.$$

2. *Si les vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment un angle obtus, le produit scalaire $\vec{a}\vec{b}$ est négatif.*

En effet, si φ est un angle obtus $\cos\varphi < 0$. Par conséquent

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi < 0.$$

3. *Si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment un angle droit, $\vec{a}\vec{b} = 0$.*

En effet, si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment un angle droit $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\cos\varphi = 0$. Donc, $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = 0$.

4. *Si le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est nul, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment un angle droit.*

En effet, si seulement l'un des vecteurs est nul, on peut le considérer comme perpendiculaire à l'autre car un vecteur nul peut être considéré comme orienté en n'importe quelle direction. Si aucun des vecteurs n'est nul, en vertu de l'égalité $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 0$ nous aurons $\cos\varphi = 0$ et donc $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ce qui signifie précisément que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

Les deux dernières propriétés peuvent être énoncées dans la même formule comme suit: *pour que le produit scalaire de deux vecteurs soit nul, il faut et il suffit que ces deux vecteurs forment un angle droit.*

Notons enfin encore une propriété du produit scalaire.

5. *La multiplication scalaire d'un vecteur par lui-même donne le carré de son module*:

$$\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

En effet $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0$. Or, $\cos 0 = 1$, et, par conséquent, $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Remarque. Le produit scalaire $\vec{a}\vec{a}$ est appelé carré scalaire du vecteur $\vec{a}$ et désigné par le symbole $\vec{a}^2$. En vertu de ce qui vient d'être énoncé nous pouvons poser $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. En d'autres termes, *le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de son module.*

§ 57. EXPRESSION DU PRODUIT SCALAIRE À L'AIDE DES COORDONNÉES DES VECTEURS

180. Le théorème suivant nous donne la possibilité de calculer le produit scalaire de deux vecteurs connaissant leurs coordonnées, autrement dit leurs projections sur les axes d'un système de coordonnées cartésiennes orthogonales.

Théorème 20. *Si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont définis par leurs coordonnées*:

$$\vec{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\},\quad \vec{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},$$

leur produit scalaire est fourni par la formule

$$\vec{a}\vec{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Démonstration. Etablissons tout d'abord la «table de multiplication» des vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\left.\begin{array}{lll} \vec{i}^2=1, & \vec{i}\,\vec{j}=0, & \vec{i}\,\vec{k}=0, \\ \vec{j}\,\vec{i}=0, & \vec{j}^2=1, & \vec{j}\,\vec{k}=0, \\ \vec{k}\,\vec{i}=0, & \vec{k}\,\vec{j}=0, & \vec{k}^2=1. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Les produits des différents vecteurs de base sont nuls en ce cas, car ces vecteurs sont perpendiculaires l'un à l'autre (voir propriété 3, n° 179); $\vec{i}^2 = 1$, $\vec{j}^2 = 1$, $\vec{k}^2 = 1$ car $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont des vecteurs unités (voir propriété 5, n° 179).

Développons à présent les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ suivant la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}, \\ \vec{b}=X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k} \end{array}\right\} \quad (2)$$

(voir théorème 19, n° 173). En vertu des propriétés algébriques du produit scalaire établies au n° 176 nous pouvons en calculant le produit $\vec{a}\,\vec{b}$ multiplier terme à terme les seconds membres des égalités (2):

$$\begin{aligned} \vec{a}\,\vec{b} = {} & X_1X_2\vec{i}^2 + X_1Y_2\vec{i}\,\vec{j} + X_1Z_2\vec{i}\,\vec{k} + \\ & + Y_1X_2\vec{j}\,\vec{i} + Y_1Y_2\vec{j}^2 + Y_1Z_2\vec{j}\,\vec{k} + \\ & + Z_1X_2\vec{k}\,\vec{i} + Z_1Y_2\vec{k}\,\vec{j} + Z_1Z_2\vec{k}^2. \end{aligned}$$

En utilisant la «table de multiplication» des vecteurs de base nous obtenons:

$$\vec{a}\,\vec{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2, \text{ c.q.f.d.}$$

On peut exprimer ainsi le théorème établi: *le produit scalaire de deux vecteurs est égal à la somme des produits des composantes homologues de ces vecteurs.*

181. Nous allons indiquer maintenant trois corollaires importants du théorème 20.

Corollaire 1. *L'égalité*

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0 \quad (3)$$

est la condition nécessaire et suffisante de perpendicularité des deux vecteurs

$$\vec{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}.$$

En effet, nous avons montré au n° 179 que pour que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ fassent un angle droit, il faut et il suffit que $\vec{a}\vec{b} = 0$. Mais en vertu du théorème 20 nous avons: $\vec{a}\vec{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$. Par conséquent, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne font un angle droit que si l'égalité (3) est vraie.

Corollaire 2. *L'angle* φ *entre les vecteurs*

$$\vec{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$$

est défini par l'égalité

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \tag{4}$$

En effet, par définition du produit scalaire $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$, d'où

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \tag{5}$$

Mais le théorème 20 nous donne: $\vec{a}\vec{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$ et d'après le théorème 16 (n° 155) $|\vec{a}| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$ et $|\vec{b}| = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}$. Ce qui avec la formule (5) nous donne la formule (4).

Corollaire 3. *Si un axe u forme avec les axes de coordonnées des angles* α, β, γ, *la projection d'un vecteur quelconque* $\vec{s} = \{X;\ Y;\ Z\}$ *sur l'axe u est définie par l'égalité*

$$\mathrm{Proj}_u \vec{s} = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma. \tag{6}$$

Pour le démontrer supposons que la direction de l'axe u soit définie par un vecteur unité $\vec{e}$. En vertu de la formule (2), n° 174 nous avons: $\vec{e}\vec{s} = |\vec{e}| \cdot \mathrm{Proj}_e \vec{s}$. Notons que $|\vec{e}| = 1$ et $\mathrm{Proj}_e \vec{s} = \mathrm{Proj}_u \vec{s}$. Donc, $\mathrm{Proj}_u \vec{s} = \vec{e}\vec{s}$. Etant donné que le vecteur $\vec{e}$ est dirigé suivant l'axe u donné, il forme avec les axes de coordonnées les mêmes angles que cet axe, c'est-à-dire α, β, γ. Nous pouvons donc en conclure (voir théorème 16, n° 155) que

$$\mathrm{Proj}_x \vec{e} = |\vec{e}|\cos\alpha, \quad \mathrm{Proj}_y \vec{e} = |\vec{e}|\cos\beta, \quad \mathrm{Proj}_z \vec{e} = |\vec{e}|\cos\gamma.$$

Mais $|\vec{e}| = 1$. Donc,

$$\vec{e} = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}.$$

Ayant $\vec{s} = \{X;\ Y;\ Z\}$ et $\vec{e} = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$ nous trouvons d'après le théorème 20: $\mathrm{Proj}_u \vec{s} = \vec{e}\vec{s} = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma$. Ce qu'il fallait démontrer.

182. Exemple 1. Soient trois points A (1 ; 1 ; 1), B (2 ; 2 ; 1) et C (2 ; 1 ; 2). Trouver l'angle $\varphi = \angle BAC$.

Solution. Appliquant le théorème 15 (n° 151), nous trouvons:

$$\overrightarrow{AB} = \{1 ; 1 ; 0\}, \quad \overrightarrow{AC} = \{1 ; 0 ; 1\}.$$

D'où et en vertu du corollaire 2 du théorème 20:

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $\varphi = 60°$.

Exemple 2. Soient les points A (1 ; 1 ; 1) et B (4 ; 5 ; —3). Trouver la projection du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe u formant avec les axes de coordonnées des angles aigus égaux.

Solution. Soient $\cos\alpha$, $\cos\beta$ et $\cos\gamma$ les cosinus directeurs de l'axe u. Suivant les données du problème ils sont égaux entre eux et positifs (car α, β et γ sont des angles aigus égaux). Mais conformément à l'égalité (4), n° 156,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

D'où et conformément à ce que nous venons d'énoncer

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

D'après le théorème 15 (n° 151)

$$\overrightarrow{AB} = \{3 ; 4 ; -4\}.$$

Il nous reste à appliquer le corollaire 3 du théorème 20, autrement dit la formule (6). Il vient:

$$\mathrm{Proj}_u \overrightarrow{AB} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

CHAPITRE X

PRODUITS VECTORIEL ET MIXTE DES VECTEURS

§ 58. LE PRODUIT VECTORIEL. SES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

183. Nous allons définir ici une nouvelle opération sur les vecteurs: le produit vectoriel. Nous supposerons à cet effet qu'un système de coordonnées cartésiennes orthogonales a été choisi dans l'espace.

On appelle produit vectoriel des vecteurs $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *le vecteur désigné par le symbole* $[\vec{a}\vec{b}]$ *et défini par les trois conditions suivantes*:

1) *le module du vecteur* $[\vec{a}\vec{b}]$ *est* égal à $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$ où φ est *l'angle des vecteurs* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$;

2) *le vecteur* $[\vec{a}\vec{b}]$ *est perpendiculaire à chacun des vecteurs* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$;

3) *le vecteur* $[\vec{a}\vec{b}]$ *est orienté par rapport aux vecteurs* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *de la même manière que l'axe de coordonnées Oz par rapport aux axes de coordonnées Ox et Oy.* Plus exactement, si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $[\vec{a}\vec{b}]$ sont rapportés à la même origine, le vecteur $[\vec{a}\vec{b}]$ doit être dirigé de façon qu'un observateur traversé des pieds à la tête par $[\vec{a}\vec{b}]$ voie la rotation minimum amenant $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ s'effectuer dans le même sens que la rotation minimum amenant le demi-axe positif *Ox* sur le demi-axe positif *Oy* pour un observateur traversé des pieds à la tête par le demi-axe positif *Oz*.

Supposons pour éviter toute équivoque que dans le système de coordonnées choisi la rotation minimum du demi-axe positif *Ox* vers le demi-axe positif *Oy* soit vue d'un point appartenant au demi-axe positif *Oz* comme s'effectuant *en sens inverse des aiguilles d'une montre*. On appelle un tel système *droit*. On peut également caractériser un système droit de la façon suivante: la direction de l'axe *Oz* de ce système est indiquée par le majeur de la main droite dont le pouce est dirigé suivant l'axe *Ox* et l'index suivant l'axe *Oy* *

Ayant choisi un système de coordonnées droit, nous allons préciser la direction du produit $[\vec{a}\vec{b}]$. Plus précisément, si $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $[\vec{a}\vec{b}]$

* Un système de coordonnées est appelé *gauche* si les axes *Ox*, *Oy* et *Oz* sont dirigés comme le pouce, l'index et le majeur de la main gauche.

sont appliqués à la même origine, le vecteur $[\vec{a}\vec{b}]$ doit être dirigé de façon que l'on voie de son extrémité la rotation minimum du vecteur $\vec{a}$ vers le vecteur $\vec{b}$ (autrement dit, du premier facteur vers le deuxième) s'effectuer *en sens inverse des aiguilles d'une montre* (fig. 97). On peut également appliquer la règle des « trois doigts

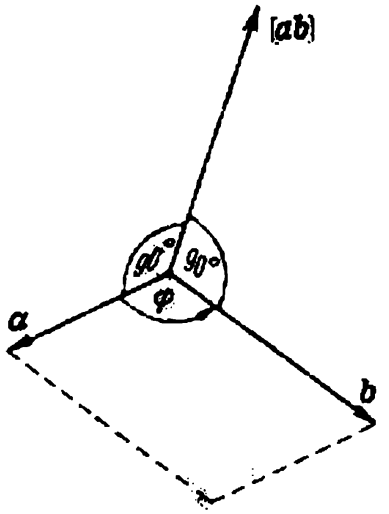


Fig. 97

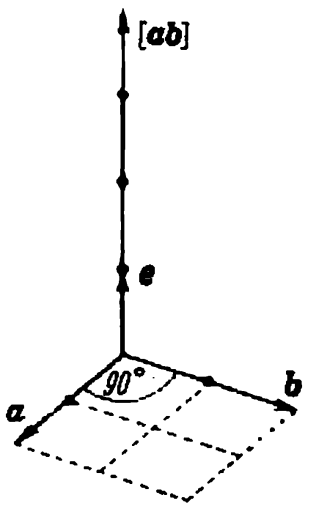


Fig. 98

de la main droite » : si $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $[\vec{a}\vec{b}]$ sont appliqués à la même origine, le vecteur $[\vec{a}\vec{b}]$ doit être dirigé comme le majeur de la main droite, le pouce étant dirigé dans le sens du premier facteur (c'est-à-dire du vecteur $\vec{a}$) et l'index dans la direction du deuxième facteur (c'est-à-dire du vecteur $\vec{b}$). Nous nous référerons souvent à cette règle.

184. La notion de produit vectoriel prend sa source dans la mécanique. A savoir, si le vecteur $\vec{b}$ représente une force appliquée à un point quelconque M et le vecteur $\vec{a}$ est dirigé d'un point O vers le point M, le vecteur $[\vec{a}\vec{b}]$ représente le moment de la force $\vec{b}$ par rapport au point O.

En calcul vectoriel on appelle $[\vec{a}\vec{b}]$ p r o d u i t de vecteurs parce que cette grandeur possède certaines propriétés algébriques des produits de nombres (voir n° 187, les propriétés 2 et 3). On l'appelle produit v e c t o r i e l car c'est un vecteur.

185. Nous noterons tout d'abord les propriétés g é o m é t r i q u e s essentielles du produit vectoriel.

1. *Si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, leur produit vectoriel est nul.*

Démonstration. Si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, leur angle φ est égal soit à 0° (lorsque $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont de même sens) soit à 180° (lorsque $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont de sens contraires). Dans les deux cas $\sin\varphi = 0$. Donc, $|[\vec{a}\vec{b}]| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi = 0$, c'est-à-dire que le module du vecteur $[\vec{a}\vec{b}]$ est nul et le vecteur $[\vec{a}\vec{b}]$ lui-même est nul.

2. *Si le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est nul les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.*

Démonstration. Soit $[\vec{a}\vec{b}] = 0$, alors $|[\vec{a}\vec{b}]| = 0$, et donc $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi = 0$. Si ni l'un ni l'autre des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont nuls nous aurons $\sin\varphi = 0$ et par conséquent les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires. Si par contre un des vecteurs $\vec{a}$ ou $\vec{b}$ est nul nous sommes en droit de le considérer comme colinéaire à l'autre, car les vecteurs nuls ont une direction arbitraire.

Nous énonçons à présent ces deux propriétés du produit vectoriel de la façon suivante: *pour que le produit vectoriel de deux vecteurs soit nul il faut et il suffit que les deux vecteurs soient colinéaires.*

3. *Si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont rapportés à la même origine, le module du produit vectoriel $|[\vec{a}\vec{b}]|$ est égal à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.*

Démonstration. Désignons par S l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On sait, par la géométrie élémentaire, que l'aire d'un parallélogramme est égale au produit de ses côtés adjacents par le sinus de l'angle qu'ils forment. D'où $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi = S$, et par conséquent,

$$|[\vec{a}\,\vec{b}]| = S, \tag{1}$$

ce qu'il fallait démontrer.

186. En vertu de la propriété précédente, nous pouvons exprimer le produit vectoriel par la formule

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = S\vec{e}, \tag{2}$$

où $\vec{e}$ est un vecteur défini par les trois conditions suivantes:

1) le module du vecteur $\vec{e}$ est égal à 1;

2) le vecteur $\vec{e}$ est perpendiculaire à chacun des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

3) le vecteur $\vec{e}$ est dirigé comme le majeur de la main droite dont le pouce est dirigé comme le vecteur $\vec{a}$ et l'index comme le vecteur $\vec{b}$

(en supposant que les vecteurs $\vec{e}$, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont ramenés à la même origine).

Pour démontrer la formule (2), comparons les conditions qui définissent le vecteur $\vec{e}$ avec celles qui définissent le produit vectoriel $[\vec{a}\vec{b}]$; il est facile de déduire de cette comparaison que les vecteurs $[\vec{a}\vec{b}]$ et $\vec{e}$ sont colinéaires et dirigés dans le même sens. Par conséquent, le vecteur $[\vec{a}\vec{b}]$ peut être obtenu en multipliant le vecteur $\vec{e}$ par un certain nombre positif. Ce nombre est égal au rapport du module du vecteur $[\vec{a}\vec{b}]$ au vecteur $\vec{e}$, comme $\vec{e} = 1$, il est simplement égal au module du vecteur $[\vec{a}\vec{b}]$, c'est-à-dire à S. Par conséquent, $[\vec{a}\vec{b}] = S\vec{e}$, ce qu'il fallait démontrer (la fig. 98 illustre la formule (2) pour le cas où $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = 90°$).

187. Nous allons établir à présent les propriétés algébriques du produit vectoriel.

1. Anticommutativité des facteurs:

$$[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}] \tag{3}$$

autrement dit, *le produit vectoriel du vecteur $\vec{a}$ par le vecteur $\vec{b}$ est un vecteur opposé au produit vectoriel de $\vec{b}$ par $\vec{a}$.*

Démonstration. Si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires $[\vec{a}\vec{b}]$ comme $[\vec{b}\vec{a}]$ deviennent nuls. L'égalité (3) sera donc vraie. Supposons à présent que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne soient pas colinéaires.

Remarquons tout d'abord qu'en vertu des deux premières conditions définissant le produit vectoriel, les vecteurs $[\vec{a}\vec{b}]$ et $[\vec{b}\vec{a}]$ ont même module et sont colinéaires. Par conséquent, nous aurons soit $[\vec{a}\vec{b}] = [\vec{b}\vec{a}]$, soit $[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}]$. Il nous reste à décider laquelle de ces deux possibilités aura réellement lieu. Cette question est résolue par la troisième condition. Nous dirigerons d'abord le pouce et l'index de la main droite respectivement suivant les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, puis suivant les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{a}$. Il nous faudra à cet effet tourner la main de telle façon que le majeur soit dirigé dans le deuxième cas dans le sens opposé à celui qu'il avait dans le premier cas ($\vec{a}$ et $\vec{b}$). Par conséquent, $[\vec{a}\vec{b}]$ et $[\vec{b}\vec{a}]$ sont de sens opposés, c'est-à-dire que

$$[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}].$$

2. Associativité par rapport au facteur scalaire:

$$[(\lambda\vec{a})\,\vec{b}] = \lambda\,[\vec{a}\,\vec{b}] \tag{4}$$

et

$$[\vec{a}\,(\lambda\vec{b})] = \lambda\,[\vec{a}\,\vec{b}]. \tag{5}$$

Démonstration. La formule (5) se réduit à la formule (4) en intervertissant l'ordre des facteurs vectoriels dans les deux membres (en remplaçant ensuite $\vec{b}$ par $\vec{a}$ et $\vec{a}$ par $\vec{b}$). Il suffit donc de démontrer la formule (4).

Remarquons avant tout que si $\lambda = 0$ ou si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, la formule (4) est évidemment vraie, car dans ce cas les deux membres de l'égalité seront nuls. Supposons donc que $\lambda \neq 0$ et $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires.

En vertu de la première condition de la définition du produit vectoriel le module du vecteur $[\vec{a}\vec{b}]$ est égal à $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$ où φ est l'angle des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Par conséquent, le module du vecteur $\lambda\,[\vec{a}\vec{b}]$ est égal à $\lambda\,|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$. Conformément à la même condition, le module du vecteur $[(\lambda\vec{a})\,\vec{b}]$ est égal à $\lambda\,|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\psi$ où ψ est l'angle des vecteurs $\lambda\vec{a}$ et $\vec{b}$. Or l'angle ψ est égal soit à l'angle φ si λ est positif, soit à l'angle $\pi - \varphi$ si λ est négatif. Dans les deux cas $\sin\varphi = \sin\psi$. Il en résulte que le module du vecteur $[(\lambda\vec{a})\,\vec{b}]$ est égal au module du vecteur $\lambda\,[\vec{a}\vec{b}]$.

Conformément à la deuxième condition de la définition du produit vectoriel les deux vecteurs $\lambda\,[\vec{a}\vec{b}]$ et $[(\lambda\vec{a})\,\vec{b}]$ sont perpendiculaires à chacun des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Par conséquent, les vecteurs $\lambda\,[\vec{a}\vec{b}]$ et $[(\lambda\vec{a})\,\vec{b}]$ sont colinéaires.

Etant donné que les vecteurs $\lambda\,[\vec{a}\vec{b}]$ et $[(\lambda\vec{a})\,\vec{b}]$ ont des modules égaux et sont colinéaires ils sont soit égaux soit opposés, autrement dit nous avons soit $[(\lambda\vec{a})\,\vec{b}] = \lambda\,[\vec{a}\vec{b}]$, soit $[(\lambda\vec{a})\,\vec{b}] = -\lambda\,[\vec{a}\vec{b}]$. Il reste à déterminer quelle sera l'égalité vraie. Nous aurons à considérer deux cas, $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$.

Soit $\lambda > 0$. Les vecteurs $\lambda\vec{a}$ et $\vec{a}$ auront alors la même direction. Dans ce cas suivant la règle des trois doigts de la main droite les vecteurs $[(\lambda\vec{a})\,\vec{b}]$ et $[\vec{a}\vec{b}]$ sont orientés dans le même sens. Mais pour $\lambda > 0$ le vecteur $\lambda\,[\vec{a}\vec{b}]$ est dirigé dans le même sens que $[\vec{a}\vec{b}]$. Par

conséquent, le vecteur $[(\lambda\vec{a})\,\vec{b}]$ est orienté dans le même sens que le vecteur $\lambda\,[\vec{a}\vec{b}]$ et donc $[(\lambda\vec{a})\,\vec{b}] = \lambda\,[\vec{a}\vec{b}]$.

Soit $\lambda < 0$. Les vecteurs $\lambda\vec{a}$ et $\vec{a}$ sont alors de sens opposés. Dans ce cas suivant la règle de la main droite le vecteur $[(\lambda\vec{a})\,\vec{b}]$ est dirigé

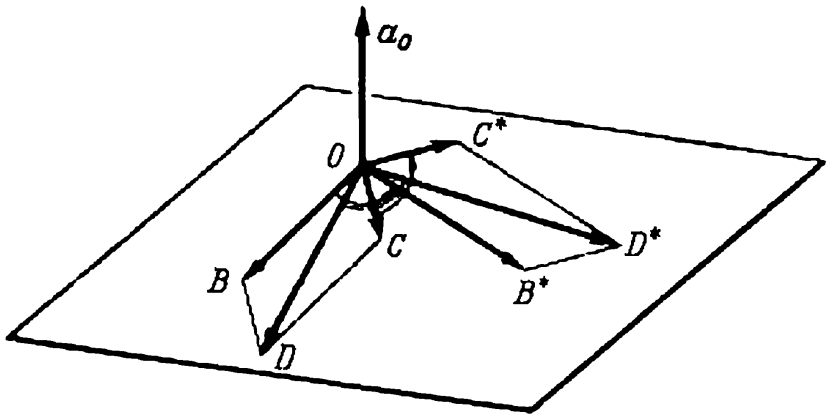


Fig. 99

dans le sens opposé au vecteur $[\vec{a}\vec{b}]$. Mais pour $\lambda < 0$ le vecteur $\lambda\,[\vec{a}\vec{b}]$ est également dirigé en sens opposé au vecteur $[\vec{a}\vec{b}]$. Par conséquent, les vecteurs $[(\lambda\vec{a})\,\vec{b}]$ et $\lambda\,[\vec{a}\vec{b}]$ sont orientés dans le même sens et donc $[(\lambda\vec{a})\,\vec{b}] = \lambda\,[\vec{a}\vec{b}]$.

Nous voyons donc que cette relation est toujours vraie.

3. Distributivité par rapport à l'addition:

$$[\vec{a}\,(\vec{b}+\vec{c})] = [\vec{a}\,\vec{b}] + [\vec{a}\,\vec{c}] \tag{6}$$

et

$$[(\vec{b}+\vec{c})\,\vec{a}] = [\vec{b}\,\vec{a}] + [\vec{c}\,\vec{a}]. \tag{7}$$

Démonstration. La formule (7) se réduit à la formule (6) par interversion des facteurs dans les deux membres de cette égalité. Il nous suffira donc de démontrer la formule (6). Remarquons que pour $\vec{a} = 0$, il est évident que la formule (6) est vraie. Nous sous-entendrons donc que $\vec{a} \neq 0$.

Considérons tout d'abord le cas particulier où le premier facteur est un vecteur unité et les deux autres lui sont perpendiculaires.

Rapportons les trois vecteurs à une origine commune O. Désignons le premier vecteur (unité) par $\vec{a}_0$: soient $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$ les deux

autres vecteurs (perpendiculaires à $\vec{a}_0$), $\vec{OD}$ leur somme: $\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD}$ (fig. 99).

Introduisons les désignations suivantes:

$$\vec{OB}^* = [\vec{a}_0\vec{OB}], \quad \vec{OC}^* = [\vec{a}_0\vec{OC}], \quad \vec{OD}^* = [\vec{a}_0\vec{OD}] = [\vec{a}_0(\vec{OB} + \vec{OC})].$$

En vertu des deux premières conditions de la définition du produit vectoriel nous avons:

$$1)\ |\vec{OB}^*| = |[\vec{a}_0\vec{OB}]| = |\vec{a}_0| \cdot |\vec{OB}| \cdot \sin 90^\circ = |\vec{OB}|.$$

$$2)\ \vec{OB}^* \perp \vec{a}_0, \quad \vec{OB}^* \perp \vec{OB}.$$

Il en découle que l'on peut obtenir le vecteur $\vec{OB}^*$ en faisant tourner le vecteur $\vec{OB}$ de 90° autour de $\vec{a}_0$. De plus, en vertu de la condition 3, cette rotation s'effectuera dans le sens inverse des aiguilles d'une montre pour un observateur situé à l'extrémité du vecteur $\vec{a}_0$. D'une manière analogue, on obtient les vecteurs $\vec{OC}^*$ et $\vec{OD}^*$ en faisant tourner les vecteurs $\vec{OC}$ et $\vec{OD}$ de 90° autour du vecteur $\vec{a}_0$ dans le même sens. Par conséquent, toute la figure $OB^*D^*C^*$ est obtenue par rotation d'un parallélogramme $OBDC$, donc $OB^*D^*C^*$ est un parallélogramme. Nous pouvons donc conclure que $\vec{OD}^* = \vec{OB}^* + \vec{OC}^*$ ou

$$[\vec{a}_0\vec{OD}] = [\vec{a}_0\vec{OB}] + [\vec{a}_0\vec{OC}]. \qquad (8)$$

C'est la formule (6) pour le cas particulier que nous avons envisagé.

Soit à présent $\vec{a}$ un vecteur quelconque perpendiculaire aux vecteurs $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$. Désignons par $\vec{a}_0$ le vecteur unité dirigé de même que $\vec{a}$. Nous aurons $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0$. Multiplions les deux membres de l'égalité (8) par le nombre $|\vec{a}|$ et remplaçons $|\vec{a}| \cdot \vec{a}_0$ par $\vec{a}$. Il vient

$$[\vec{a}\vec{OD}] = [\vec{a}\vec{OB}] + [\vec{a}\vec{OC}]. \qquad (9)$$

Considérons enfin les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de directions quelconques. Supposons-les ramenés à une origine commune O. Traçons par les extrémités des vecteurs $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{b} + \vec{c}$ des droites parallèles au vecteur $\vec{a}$. Faisons ensuite passer par le point O un plan perpendiculaire à ces droites et qui les coupera aux points B, C et D (fig. 100).

Examinons les produits vectoriels $[\vec{ab}]$ et $[\vec{a}\vec{OB}]$. Il est facile de comprendre qu'ils représentent un seul et même vecteur. En effet,

le module du vecteur $[\vec{a}\vec{b}]$ est égal au module du vecteur $[\vec{a}\vec{OB}]$, étant donné que l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{OB}$ d'une part et d'autre part, les vecteurs $[\vec{a}\vec{b}]$ et $[\vec{a}\vec{OB}]$ sont colinéaires car ils sont tous deux perpendiculaires à un

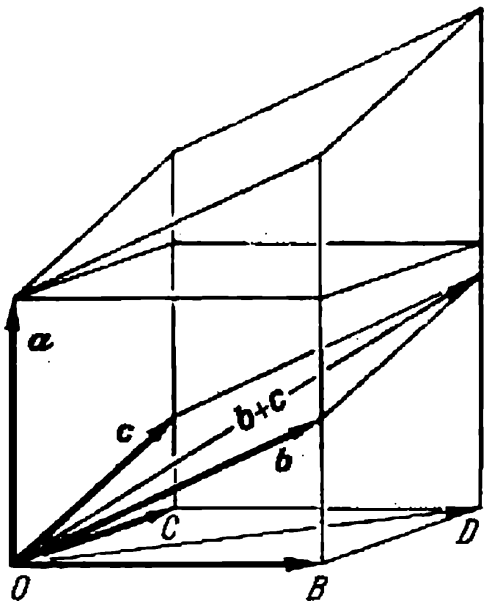


Fig. 100

seul et même plan (contenant les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{OB}$) ; enfin, suivant la règle de la main droite, les vecteurs $[\vec{a}\vec{b}]$ et $[\vec{a}\vec{OB}]$ sont dirigés dans le même sens. Ainsi donc,

$$[\vec{a}\vec{OB}] = [\vec{a}\,\vec{b}].$$

De même

$$[\vec{a}\vec{OC}] = [\vec{a}\,\vec{c}], \quad [\vec{a}\vec{OD}] = [\vec{a}\,(\vec{b}+\vec{c})].$$

Posant ces expressions dans l'égalité (9) nous obtenons

$$[\vec{a}\,(\vec{b}+\vec{c})] = [\vec{a}\,\vec{b}] + [\vec{a}\,\vec{c}],$$

ce qu'il fallait démontrer.

188. Cette dernière propriété algébrique du produit vectoriel nous permet d'effectuer les multiplications vectorielles de vecteurs terme par terme. La deuxième propriété nous donne le droit de grouper les coefficients numériques des facteurs vectoriels. Par

exemple,

$$[(2\vec{a}+5\vec{b})(3\vec{c}+4\vec{d})]=[(2\vec{a}+5\vec{b})(3\vec{c})]+[(2\vec{a}+5\vec{b})(4\vec{d})]=[(2\vec{a})(3\vec{c})]+$$
$$+[(5\vec{b})(3\vec{c})]+[(2\vec{a})(4\vec{d})]+[(5\vec{b})(4\vec{d})]=$$
$$=6[\vec{a}\,\vec{c}]+15[\vec{b}\,\vec{c}]+8[\vec{a}\,\vec{d}]+20[\vec{b}\vec{d}].$$

Il convient toutefois de se souvenir toujours que l'ordre des facteurs d'un produit vectoriel est important. Conformément à la première propriété, *lorsqu'on intervertit les facteurs d'un produit vectoriel il faut mettre devant ce produit le signe moins.*

Remarque. Nous avons montré au n° 185 que le produit vectoriel de vecteurs colinéaires était nul. En particulier, le produit vectoriel de deux facteurs identiques est nul : $[\vec{a}\vec{a}]=0$. C'est pourquoi il n'existe pas dans le calcul vectoriel de carré vectoriel.

§ 59. EXPRESSION DU PRODUIT VECTORIEL EN FONCTION DES COORDONNÉES DES VECTEURS

189. Le théorème suivant nous permet de calculer le produit vectoriel de deux vecteurs connaissant leurs coordonnées, c'est-à-dire les projections de ces vecteurs sur les axes d'un système de coordonnées cartésiennes orthogonales.

Théorème 21. *Si les vecteurs* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *sont définis par leurs coordonnées* :

$$\vec{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\} \quad \text{et} \quad \vec{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},$$

le produit vectoriel du vecteur $\vec{a}$ *par le vecteur* $\vec{b}$ *est déterminé par la formule*

$$[\vec{a}\,\vec{b}]=\left\{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right\}. \tag{1}$$

Démonstration. Dressons tout d'abord la table de multiplication vectorielle des vecteurs de base. Conformément à la remarque à la fin du n° 186, $[\vec{i}\vec{i}]=0$, $[\vec{j}\vec{j}]=0$, $[\vec{k}\vec{k}]=0$. Voyons à présent le produit vectoriel $[\vec{i}\vec{j}]$. Le module du vecteur $[\vec{i}\vec{j}]$ est égal à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (voir n° 185, propriété 3). Ce parallélogramme est un carré de côté égal à 1 et son aire est, par conséquent, égale à 1. Donc, $[\vec{i}\vec{j}]$ est un vecteur unité. Etant donné que le vecteur $[\vec{i}\vec{j}]$ doit être perpendiculaire aux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, il est facile de comprendre en s'appuyant sur la règle de la main droite que ce vecteur coïncide avec le troisième vecteur de

base, c'est-à-dire $[\vec{i}\vec{j}] = \vec{k}$. Un raisonnement analogue nous indique que $[\vec{j}\vec{k}] = i$, $[\vec{k}\vec{i}] = \vec{j}$. Il nous reste à exprimer $[\vec{j}\vec{i}]$, $[\vec{k}\vec{j}]$ et $[\vec{i}\vec{k}]$. Mais $[\vec{j}\vec{i}] = -[\vec{i}\vec{j}]$, $[\vec{i}\vec{k}] = -[\vec{k}\vec{i}]$, $[\vec{k}\vec{j}] = -[\vec{j}\vec{k}]$. Donc $[\vec{j}\vec{i}] = -\vec{k}$, $[\vec{k}\vec{j}] = -i$, $[\vec{i}\vec{k}] = -\vec{j}$. Nous obtenons ainsi la table de multiplication que voici:

$$\left.\begin{array}{lll} [\vec{i}\,\vec{i}]=0, & [\vec{i}\,\vec{j}]=\vec{k}, & [\vec{i}\,\vec{k}]=-\vec{j}, \\ [\vec{j}\,\vec{i}]=-\vec{k}, & [\vec{j}\,\vec{j}]=0, & [\vec{j}\,\vec{k}]=\vec{i}, \\ [\vec{k}\,\vec{i}]=\vec{j}, & [\vec{k}\,\vec{j}]=-\vec{i}, & [\vec{k}\,\vec{k}]=0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Développons à présent les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ selon la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k} \\ \vec{b}=X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

(v. théorème 19, n° 173). En vertu des propriétés algébriques du produit vectoriel nous pouvons effectuer la multiplication terme par terme dans les deuxièmes membres des égalités. Il vient:

$$\begin{aligned} [\vec{a}\,\vec{b}] = {} & X_1X_2[\vec{i}\,\vec{i}] + X_1Y_2[\vec{i}\,\vec{j}] + X_1Z_2[\vec{i}\,\vec{k}] + \\ & + Y_1X_2[\vec{j}\,\vec{i}] + Y_1Y_2[\vec{j}\,\vec{j}] + Y_1Z_2[\vec{j}\,\vec{k}] + \\ & + Z_1X_2[\vec{k}\,\vec{i}] + Z_1Y_2[\vec{k}\,\vec{j}] + Z_1Z_2[\vec{k}\,\vec{k}]. \end{aligned}$$

Utilisant la table de multiplication (2) des vecteurs de base:

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = (Y_1Z_2 - Y_2Z_1)\vec{i} - (X_1Z_2 - X_2Z_1)\vec{j} + (X_1Y_2 - X_2Y_1)\vec{k},$$

soit

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\vec{k}. \qquad (4)$$

Nous avons obtenu le développement du vecteur $[\vec{a}\,\vec{b}]$ selon les vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Les coefficients de ce développement sont les coordonnées du vecteur $[\vec{a}\,\vec{b}]$. Par conséquent,

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right\}. \qquad (1)$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Pour rendre plus commodes les calculs de la formule (1), il est utile d'inscrire au préalable les coordonnées des

vecteurs donnés sous forme de table comme suit:

$$\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{pmatrix}.$$

En supprimant ici la première, puis la deuxième et enfin la troisième colonne, nous obtenons successivement trois déterminants du deuxième ordre. En les calculant et prenant le deuxième avec le signe—, nous trouvons les trois coordonnées du vecteur $[\vec{a}\vec{b}]$.

Remarquons encore que l'on peut donner à la formule (4) (qui est équivalente à la formule (1)) la forme suivante:

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

En effet, si nous développons ce déterminant d'après les éléments de la première ligne, nous trouvons exactement la même expression que dans le deuxième membre de la formule (4).

190. Exemple 1. Soient les vecteurs $\vec{a} = \{2; 5; 7\}$ et $\vec{b} = \{1; 2; 4\}$. Trouver les coordonnées du produit vectoriel $[\vec{a}\vec{b}]$.

Solution. Conformément aux remarques du numéro précédent, dressons le tableau

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cachant successivement les colonnes de ce tableau, nous obtenons trois déterminants du second ordre. En les calculant et prenant le deuxième avec le signe—, nous trouvons les projections cherchées

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \{6; -1; -1\}.$$

Exemple 2. Soient trois points dans l'espace: $A(1; 1; 1)$, $B(2; 2; 2)$ et $C(4; 3; 5)$. Déterminer la surface S_Δ du triangle ABC.

Solution Considérons les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. En vertu du n° 183, propriété 3, le module du produit vectoriel $[\vec{AB}\,\vec{AC}]$ est égal à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. Or, l'aire du triangle que nous devons déterminer est égale à la moitié de l'aire de ce parallélogramme

$$S_\Delta = \frac{1}{2} |[\vec{AB}\ \vec{AC}]|.$$

Il nous reste à calculer la valeur du deuxième membre de cette égalité.

Avant tout, nous appuyant sur le théorème 15 (n° 151), trouvons les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$:

$$\vec{AB} = \{1; 1; 1\}, \quad \vec{AC} = \{3; 2; 4\}.$$

D'où $[\vec{AB}\ \vec{AC}] = \{2; -1; -1\}$ et $|[\vec{AB}\ \vec{AC}]| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$.

Nous trouvons donc $S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

§ 60. PRODUIT MIXTE DE TROIS VECTEURS

191. Soient trois vecteurs quelconques $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$. Imaginons que le vecteur $\vec{a}$ soit multiplié par le vecteur $\vec{b}$ vectoriellement et le vecteur obtenu $[\vec{a}\vec{b}]$ par le vecteur $\vec{c}$ scalairement. Nous aurons ainsi défini le nombre $[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c}$. Ce nombre est appelé produit vectoriel-scalaire ou mixte des trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (nous userons par la suite de cette dernière dénomination). Nous étudierons dans les paragraphes suivants les propriétés du produit mixte et nous indiquerons une série de problèmes à la solution desquels le produit mixte peut être appliqué avec succès.

192. Nous conviendrons de dire que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sont *coplanaires* s'ils appartiennent au même plan ou à des plans parallèles. Etant donné que les vecteurs géométriques sont des vecteurs libres on peut toujours lorsqu'ils sont coplanaires les transporter dans un même plan par translation. En particulier, des vecteurs coplanaires se trouveront dans le même plan si on les applique à une origine commune.

193. Si en donnant trois vecteurs on indique le premier, le deuxième et le troisième, on dit que l'on a un ensemble de trois vecteurs ordonnés. Nous inscrirons ces vecteurs dans le texte dans l'ordre de leur numération. Par exemple, si nous écrivons $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cela signifie que l'on considère $\vec{a}$ comme le premier vecteur, $\vec{b}$ comme le deuxième et $\vec{c}$ comme le troisième.

Si nous écrivons $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$, c'est que nous considérons $\vec{b}$ comme le premier vecteur, $\vec{c}$ comme le deuxième et $\vec{a}$ comme le troisième.

194. Un système de trois vecteurs non coplanaires est dit *droit* si les vecteurs qui le composent étant rapportés à une origine commune se disposent dans le même ordre de numération que le pouce, l'index et le majeur de la main droite. Précisons: un système de trois vecteurs non coplanaires est dit droit si son troisième vecteur est disposé par rapport au plan formé par les deux autres du même côté que le majeur de la main droite dont le pouce est dirigé suivant le premier vecteur du système et l'index suivant le deuxième.

Un système de trois vecteurs non coplanaires est dit *gauche* si les vecteurs qui le constituent, étant appliqués à la même origine, se répartissent suivant leur ordre de numération comme le pouce, l'index et le majeur de la main gauche.

Un système de trois vecteurs coplanaires n'est ni droit ni gauche.

195. Soient des vecteurs non coplanaires quelconques $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. En les numérotant de toutes les façons possibles, nous obtiendrons

six systèmes de trois vecteurs: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$; $\vec{b},\vec{c},\vec{a}$; $\vec{c},\vec{a},\vec{b}$; $\vec{b},\vec{a},\vec{c}$; $\vec{a},\vec{c},\vec{b}$; $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$. Par observation directe d'un modèle (qu'il est facile de confectionner avec du fil de fer) nous pouvons nous convaincre que ces six systèmes de trois vecteurs contiennent trois systèmes gauches et trois systèmes droits.

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c};\quad \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{a};\quad \vec{c},\ \vec{a},\ \vec{b}$$

sont des systèmes de même orientation, c'est-à-dire qu'ils sont soit tous droits, soit tous gauches.

$$\vec{b},\ \vec{a},\ \vec{c};\quad \vec{a},\ \vec{c},\ \vec{b};\quad \vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a}$$

sont les systèmes d'orientation contraire *

196. L'important théorème suivant exprime le sens géométrique du produit mixte.

T h é o r è m e 22. *Le produit mixte* $[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c}$ *est égal au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, *pris avec le signe* +, *si le système* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *est droit et avec le signe* — *si ce système est gauche. Si les vecteurs* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *sont coplanaires,* $[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c} = 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons tout d'abord que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires. Désignons par S l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et par $\vec{e}$ le vecteur unité défini comme dans le n° 186. D'après la formule (2), n° 186,

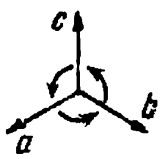
$$[\vec{a}\,\vec{b}] = S\vec{e}.$$

D'où

$$[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c} = S(\vec{e}\,\vec{c}) = S\,|\vec{e}|\,\mathrm{Proj}_{\vec{e}}\,\vec{c} = S\,\mathrm{Proj}_{\vec{e}}\,\vec{c}. \qquad (1)$$

---

* On peut indiquer le moyen suivant pour distinguer les systèmes. Imaginons que nous soyons à l'intérieur du trièdre dont les trois vecteurs sont les arêtes. Si pour aller du premier au deuxième puis au troisième et revenir au



premier, nous devons tourner en sens inverse des aiguilles d'une montre, le système auquel nous avons affaire est un système d r o i t. Si par contre nous devons tourner dans le sens des aiguilles d'une montre, le système est un système g a u c h e. Conformément à cette règle, les systèmes $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ et $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ sont des systèmes droits sur le graphique ci-dessus.

Mais $\text{Proj}_e \vec{c} = \pm h$, où h est la hauteur du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, à condition que l'on considère comme base le parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (fig. 101). Par conséquent, en désignant le volume du parallélépipède par V

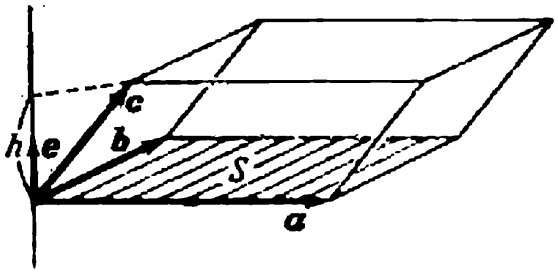


Fig. 101

et vu que $hS = V$, nous trouvons en vertu de (1) :

$$[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c} = \pm V. \tag{2}$$

Nous devons établir maintenant dans quel cas nous aurons un signe + et dans quel cas un signe —. Remarquons à cet effet que $\text{Proj}_e \vec{c} = +h$ si le vecteur c est disposé du même côté du plan déterminé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ que le vecteur $\vec{e}$, c'est-à-dire si le système de vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ est de même orientation que le système $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$ (voir n° 192) ; $\text{Proj}_e \vec{c} = -\vec{h}$ si les vecteurs $\vec{c}$ et $\vec{e}$ se trouvent de part et d'autre du plan des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, autrement dit si les systèmes $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$ sont d'orientations différentes. Mais par définition du vecteur $\vec{e}$ (voir n° 186) le système $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$ est un système droit. Nous aurons donc dans la formule (2) un signe + si le système $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ est droit et un signe — si ce système est gauche. Si enfin le vecteur $\vec{c}$ appartient au plan $\vec{a}$, $\vec{b}$, autrement dit si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires, $\text{Proj}_e \vec{c} = 0$ et, comme l'indique l'égalité (1), $[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c} = 0$. Le théorème est ainsi entièrement démontré dans la supposition que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires. Il nous reste à considérer le cas où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires. Dans ce cas $[\vec{a}\vec{b}] = 0$ et, par conséquent, $[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c} = 0$, ce qui est également en accord avec l'énoncé du théorème, car si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires.

Le théorème est démontré.

197. Il est facile de déduire du théorème 22 l'identité suivante :

$$[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c} = \vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]. \tag{3}$$

Démonstration. Etant donné que l'on peut intervertir les facteurs dans la multiplication scalaire,

$$\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}] = [\vec{b}\,\vec{c}]\,\vec{a}. \tag{4}$$

Ensuite, le théorème 22 nous donne :

$$[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c} = \pm V, \quad [\vec{b}\,\vec{c}]\,\vec{a} = \pm V. \tag{5}$$

En vertu du n° 195, les systèmes $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ sont de même orientation. C'est pourquoi et compte tenu du théorème 22 nous devons prendre dans les deuxièmes membres des égalités (5) un seul et même signe. Par conséquent, les égalités (5) nous donnent :

$$[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c} = [\vec{b}\,\vec{c}]\,\vec{a}.$$

D'où et en vertu de l'égalité (4),

$$[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c} = \vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}],$$

ce qu'il fallait démontrer.

198. Nous désignerons dans la suite de l'exposé les produits $[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c}$ et $\vec{a}\,[\vec{b}\vec{c}]$ plus simplement par le symbole $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Le fait que l'on n'indique pas quels sont les vecteurs qui sont multipliés entre eux vectoriellement ne peut provoquer de malentendus car $[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c} = \vec{a}\,[\vec{b}\vec{c}]$.

199. Soulignons que la proposition suivante découle directement du théorème 22.

Le produit mixte des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ est nul si et seulement si $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires.

En effet, le théorème 22 indique directement que si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sont coplanaires le produit $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. Le même théorème affirme que $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ seulement si $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires. Plus précisément, si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ne sont pas coplanaires, le parallélépipède construit sur ces vecteurs a un volume non nul, par conséquent, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} \neq 0$.

Cette même affirmation peut être également énoncée comme suit.

La condition nécessaire et suffisante pour que trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *soient coplanaires est que leur produit mixte soit nul:* $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

§ 61. EXPRESSION DU PRODUIT MIXTE EN FONCTION DES COORDONNÉES DES VECTEURS

200. Théorème 23. *Si les vecteurs* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *sont définis par leurs coordonnées:*

$$\vec{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\},\quad \vec{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},\quad \vec{c}=\{X_3;\ Y_3;\ Z_3\},$$

le produit mixte de ces vecteurs est déterminé par la formule

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Démonstration. Nous avons $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c}$. En vertu du théorème 21 (n° 189),

$$[\vec{a}\vec{b}]=\left\{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix};\quad -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

En multipliant scalairement ce vecteur par $\vec{c}=\{X_3;\ Y_3;\ Z_3\}$ et en nous appuyant sur le théorème 20 (n° 180), nous trouvons:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c}=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}X_3-\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}Y_3+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}Z_3=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exemple. Soient quatre points dans l'espace: A (1; 1; 1), B (4; 4; 4), C(3; 5; 5), D (2; 4; 7). Trouver le volume du tétraèdre $ABCD$.

Solution. On sait par la géométrie élémentaire que le volume V_T du tétraèdre $ABCD$ est égal à $^1/_6$ du volume du parallélépipède construit sur ses vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$. D'où nous pouvons conclure ainsi que du théorème 22 que V_T est égal à la sixième partie de la valeur absolue du produit mixte des vecteurs $\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}$. Il nous reste à calculer ce produit mixte.

Trouvons tout d'abord les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$. D'après le théorème 15 du n° 151 nous avons:

$$\vec{AB}=\{3;\ 3;\ 3\},\quad \vec{AC}=\{2;\ 4;\ 4\},\quad \vec{AD}=\{1;\ 3;\ 6\}.$$

D'où et d'après le théorème 23 nous trouvons :

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}=\begin{vmatrix}3 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 6\end{vmatrix}=18,$$

soit $V_T=3$.

201. Conformément au n° 199, *la condition nécessaire et suffisante pour que trois vecteurs* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *et* $\vec{c}$ *soient coplanaires est que leur produit mixte soit nul.*

En vertu de cette proposition et du théorème 23, nous pouvons donc conclure que : *si les vecteurs* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *et* $\vec{c}$ *sont définis par leurs coordonnées :*

$$\vec{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\},\quad \vec{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},\quad \vec{c}=\{X_3;\ Y_3;\ Z_3\},$$

la condition nécessaire et suffisante pour que ces vecteurs soient coplanaires s'exprime par la relation

$$\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}=0,$$

qui est la nullité du déterminant de troisième ordre ayant pour éléments les coordonnées des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

CHAPITRE XI

ÉQUATION D'UNE SURFACE ET ÉQUATIONS D'UNE COURBE

§ 62. ÉQUATION D'UNE SURFACE

202. On sait que certaines surfaces élémentaires (plan, sphère, cylindre de révolution, cône de révolution) peuvent être étudiées avec facilité à l'aide des méthodes de la géométrie élémentaire. Mais le problème général de l'étude des nombreuses surfaces qui se rencontrent dans les différentes branches des mathématiques et de leurs applications nécessitent les méthodes plus perfectionnées de l'algèbre et de l'analyse. Les méthodes de l'algèbre et de l'analyse à leur tour s'appuient sur le procédé uniforme de définition d'une surface par une équation.

203. Soient x, y, z des grandeurs variables arbitraires. Cela signifie que nous entendons par les symboles x, y, z des nombres (réels) quelconques. Nous appellerons les relations de la forme $F(x, y, z) = 0$, où $F(x, y, z)$ est une relation quelconque contenant x, y, z, équation à trois variables x, y, z, si l'égalité $F(x, y, z) = 0$ n'est pas toujours vraie, c'est-à-dire pas pour toutes les combinaisons des trois variables x, y, z. On dit que les trois nombres $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ satisfont à une équation donnée à trois variables si en substituant ces valeurs aux variables l'équation est vérifiée. Si $F(x, y, z) = 0$ est une identité, toutes les valeurs de x, y et z lui satisfont.

204. La notion d'équation d'une surface est une des notions fondamentales de la géométrie analytique dans l'espace. Nous allons expliquer tout à l'heure ce que l'on entend par là.

Soient une surface quelconque dans l'espace et un système de coordonnées déterminé.

On appelle équation de la surface (dans le système de coordonnées choisi) *une équation à trois variables à laquelle satisfont les coordonnées de chaque point appartenant à cette surface, mais qui n'est satisfaite par les coordonnées d'aucun autre point.*

Par conséquent, l'équation de la surface étant connue, on peut pour chaque point de l'espace déterminer s'il appartient ou non à cette surface. Il suffit de substituer les coordonnées du point envisagé aux variables de l'équation. Le point appartient à la surface si ses coordonnées satisfont à l'équation et n'y appartient pas dans le cas contraire.

La définition qui vient d'être énoncée fournit la base de la géométrie analytique dans l'espace. Les méthodes de la géométrie analytique dans l'espace consistent dans l'étude des surfaces envisagées par l'analyse de leurs équations. Si la surface est définie par des moyens purement géométriques, on commencera par établir l'équation de cette surface. Mais dans de nombreux problèmes l'équation joue le rôle de donnée primaire, la surface elle-même étant considérée comme un élément secondaire. Autrement dit, on se donne souvent une certaine équation qui détermine ainsi une certaine surface.

205. Si l'équation est donnée et que nous répondions à la question : « quelle est la surface que l'équation définit » (ou bien « quelle est la surface qui a cette expression pour équation »), il est commode d'user de l'énoncé suivant.

La surface définie par l'équation donnée (dans un certain système de coordonnées) est le lieu géométrique des points dont les coordonnées satisfont à cette équation.

Remarque. Si $M(x; y; z)$ est un point variable de la surface, on appelle x, y et z coordonnées courantes.

206. Exemple. Dans un système de coordonnées cartésiennes orthogonales l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2 \qquad (1)$$

définit une sphère dont le centre est le point $C(\alpha; \beta; \gamma)$ et dont le rayon est r.

En effet, si $M(x; y; z)$ est un point quelconque, nous aurons $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}=CM$, d'où il découle avec évidence que seules les coordonnées des points situés à la distance r du point C satisfont à l'équation (1). Par conséquent, le lieu géométrique des points dont les coordonnées satisfont à cette équation est une sphère de centre $C(\alpha; \beta; \gamma)$ et de rayon r.

§ 63. ÉQUATIONS D'UNE COURBE. PROBLÈME DE L'INTERSECTION DE TROIS SURFACES

207. En géométrie analytique dans l'espace toute courbe est considérée comme l'intersection de deux surfaces, en vertu de quoi elle est définie par deux équations.

Si $F(x, y, z) = 0$ et $\Phi(x, y, z) = 0$ sont les équations de deux surfaces dont l'intersection est la courbe L, la courbe L est le lieu géométrique des points communs à ces deux surfaces, c'est-à-dire des points dont les coordonnées satisfont simultanément à l'équation $F(x, y, z) = 0$ et à l'équation $\Phi(x, y, z) = 0$.

Par conséquent, *deux équations*

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ \Phi(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

définissent ensemble la courbe L.

Par exemple, les deux équations

$$\left.\begin{aligned} (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 &= 14, \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

définissent ensemble un cercle (en tant que ligne d'intersection de deux sphères).

208. Si $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, z) = 0$, $\Psi(x, y, z) = 0$ sont les équations de trois surfaces, la résolution du système de trois équations

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ \Phi(x, y, z) &= 0, \\ \Psi(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

fournira les coordonnées du point commun à ces trois surfaces. Par conséquent, *le problème de géométrie qui consiste à trouver les points d'intersection de trois surfaces est équivalent au problème d'algèbre qui consiste à résoudre un système de trois équations à trois inconnues.*

Exemple. Trouver les points d'intersection de trois surfaces, la première étant une sphère de centre (—1; —1; 0) et de rayon 5, la deuxième une sphère de centre (1 ; 1 ; 3) et de rayon 4 et la troisième un plan parallèle au plan *Oxy* disposé dans le demi-espace supérieur à une distance de trois unités de longueur du plan *Oxy*.

Solution. Le problème se ramène à la solution du système suivant de trois équations à trois inconnues:

$$\left.\begin{aligned} (x+1)^2+(y+1)^2+z^2 &= 25, \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 &= 16, \\ z &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Posant dans les deux premières équations $z=3$ et ouvrant les parenthèses, nous obtenons :

$$x^2+y^2+2x+2y = 14,$$
$$x^2+y^2-2x-2y = 14.$$

Il vient $x+y=0$, $x^2+y^2=14$. Par conséquent, $x=\pm\sqrt{7}$, $y=-x$. Nous trouvons donc deux points : $(\sqrt{7}; -\sqrt{7}; 3)$ et $(-\sqrt{7}; \sqrt{7}; 3)$.

§ 64. ÉQUATION D'UNE SURFACE CYLINDRIQUE DONT LES GÉNÉRATRICES SONT PARALLÈLES À L'UN DES AXES DE COORDONNÉES

209. Nous allons maintenant examiner spécialement une équation de la forme $F(x, y) = 0$. Ce qui fait la particularité de cette équation, c'est que le premier membre ne contient pas la variable z.

Cela signifie que l'équation donnée ne lie que les deux premières coordonnées, la troisième pouvant prendre des valeurs arbitraires.

Nous allons prouver qu'une *équation de cette forme définit une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz.*

Désignons par S la surface déterminée par une équation de la forme $F(x, y) = 0$. Soit $M_0(x_0; y_0; z_0)$ un point quelconque de la

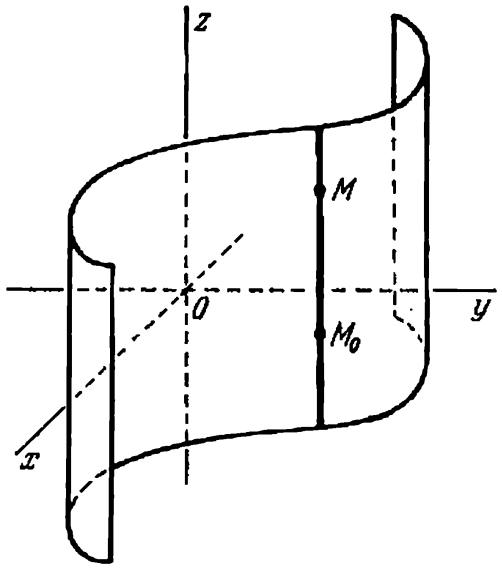


Fig. 102

surface S. Etant donné que le point M_0 appartient à la surface S, les nombres x_0, y_0, z_0 satisfont à l'équation $F(x, y) = 0$. Mais alors les nombres x_0, y_0 et z, où z est un nombre quelconque arbitraire, satisfont également à cette équation, étant donné que $F(x, y)$ est indépendant de z. Par conséquent, pour tout z le point $M_0(x_0; y_0; z)$ appartient à la surface S (fig. 102). Cela signifie que la surface S contient entièrement la droite passant par le point M_0 parallèlement à l'axe Oz. Par conséquent, la surface S est constituée de droites parallèles à l'axe Oz, ce qui indique que c'est une surface cylindrique disposée comme nous l'avons indiqué.

Remarquons que sur le plan Oxy dans le système de coordonnées défini par les axes Ox et Oy l'équation $F(x, y) = 0$ définit une courbe qui est la *directrice* du cylindre considéré. Mais dans un système de coordonnées dans l'espace cette même courbe doit être définie par deux équations:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y) &= 0, \\ z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Exemple. Dans un système de coordonnées dans l'espace l'équation $x^2 + y^2 = r^2$ définit un cylindre de révolution. La directrice de ce cylindre (un

cercle) appartient au plan Oxy et est définie par deux équations:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=r^2,\\ z&=0. \end{aligned}\right\}$$

210. Par analogie avec ce qui vient d'être énoncé, il est facile de comprendre que l'équation $F(x, z) = 0$ (dans l'espace) définit une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oy. L'équation $F(y, z) = 0$ définit une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Ox.

211. Considérons dans l'espace la courbe L définie par les équations

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z)&=0,\\ \Phi(x, y, z)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Soit

$$\Psi(x, y)=0 \tag{2}$$

l'équation obtenue par élimination de la variable z du système (1). Cela signifie

1) que l'équation (2) est une conséquence du système (1), c'est-à-dire que chaque fois que trois nombres x, y, z satisfont à l'équation (1) les deux premiers nombres x et y satisfont à l'équation (2);

2) que si deux nombres x, y satisfont à l'équation (2) il se trouvera toujours un troisième nombre z tel que les trois nombres x, y, z satisferont aux deux équations du système (1).

Conformément à ce qui a été exposé au n° 209, l'équation (2) définit une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz. Ensuite, en vertu des propriétés de l'équation (2) que nous venons de formuler, chaque point de la courbe L appartient à cette surface cylindrique, autrement dit cette surface cylindrique passe par la courbe L. Enfin, conformément à la deuxième propriété, chaque génératrice passe par un point quelconque de la courbe L. Nous pouvons conclure de tout ce qui vient d'être dit que la surface déterminée par l'équation $\Psi(x, y) = 0$ est composée des droites qui projettent les points de la courbe L sur le plan Oxy, c'est pourquoi on l'appelle surface cylindrique projetant la courbe L sur le plan Oxy (ou simplement cylindre de projection).

La projection de la courbe L sur le plan Oxy est définie par deux équations

$$\left.\begin{aligned} \Psi(x, y)&=0,\\ z&=0. \end{aligned}\right\}$$

D'une manière analogue, en éliminant du système (1) la variable x ou la variable y on peut obtenir la projection de la courbe L sur le plan Oyz ou Oxz.

Exemple. L'intersection de deux sphères définit un cercle:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=1,\\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2&=1. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Trouver la projection de ce cercle sur l'axe *Oxy*.

Solution. Nous devons trouver l'équation du cylindre projetant le cercle donné sur le plan *Oxy*. Il faut à cet effet éliminer z des équations (3). En retranchant la seconde équation de la première dans le système (3), nous trouvons

$$y+z=1. \tag{4}$$

D'où $z=1-y$. Substituant $1-y$ à z dans l'une quelconque des deux équations (3) nous obtenons:

$$x^2+2y^2-2y=0. \tag{5}$$

C'est justement le résultat de l'élimination de z du système (3).

En effet, l'équation (5) découle des équations (3). De plus, si x et y satisfont à l'équation (5) la première des équations (3) donne

$$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}=\pm\sqrt{1+2y^2-2y-y^2}=\pm(1-y);$$

de la deuxième équation (3) il vient

$$z-1=\pm\sqrt{1-x^2-(y-1)^2}=\pm\sqrt{1+2y^2-2y-y^2+2y-1}=\pm y.$$

Ainsi donc, si les deux nombres x et y satisfont à l'équation (5) il se trouvera un troisième nombre z, à savoir $z=1-y$, tel que les trois nombres x, y et z satisferont aux deux équations du système (3).

Nous voyons que les deux conditions (voir ici même plus haut) auxquelles doit satisfaire le résultat de l'élimination de z du système (3) sont remplies pour l'équation (5). En vertu de ce qui a été énoncé ci-dessus, l'équation (5) définit le cylindre projetant le cercle donné sur le plan *Oxy*. La projection elle-même est donnée par deux équations

$$\left.\begin{aligned} x^2+2y^2-2y&=0,\\ z&=0. \end{aligned}\right\}$$

Etant donné que la première équation se réduit à la forme $\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}}+\dfrac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}=1$,

la projection trouvée est une ellipse dont les demi-axes sont $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $b=\dfrac{1}{2}$.

§ 65. SURFACES ALGÉBRIQUES

212. La géométrie analytique dans l'espace a pour objet principal l'étude des surfaces définies par des équations algébriques par rapport à des coordonnées cartésiennes orthogonales.

Ce sont les équations des formes suivantes:

$$Ax+By+Cz+D=0; \tag{1}$$

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0; \tag{2}$$

. . . . . .

Dans ces formules A, B, C, D, E, etc., sont des nombres donnés, dits coefficients de ces équations.

L'équation (1) est dite *équation générale du premier degré* (les valeurs numériques de ses coefficients peuvent être quelconques à condition que l'équation contienne réellement des termes du premier degré, autrement dit les valeurs nulles pour A, B et C simultanément sont exclues). L'équation (2) est dite *équation générale du second degré* (les valeurs numériques de ses coefficients peuvent être quelconques à cette condition près que l'équation doit contenir des termes du second degré, autrement dit le cas où les six coefficients A, B, C, D, E, F sont nuls simultanément est exclu). Les équations du troisième, quatrième, cinquième degré, etc., ont la même forme.

Toute surface définie dans un système de coordonnées cartésiennes orthogonales par une équation algébrique de degré n est dite surface algébrique de degré n.

On peut démontrer que toute surface définie par une équation algébrique de degré n dans un système quelconque de coordonnées cartésiennes orthogonales est définie dans tout autre système de coordonnées cartésiennes orthogonales également par une équation algébrique et de même degré n. La démonstration se fait d'une manière analogue à celle du théorème 8, n° 49, et est basée sur les formules de transformation des coordonnées cartésiennes orthogonales de l'espace. Puisque nous n'avons pas établi ces formules antérieurement nous passerons outre leur démonstration à présent (voir n^{os} 259-262).

213. La théorie générale des surfaces algébriques fait l'objet d'ouvrages spéciaux de géométrie analytique. Nous n'étudierons dans le présent manuel que les surfaces du premier et du second degré.

CHAPITRE XII

LE PLAN EN TANT QUE SURFACE DU PREMIER DEGRÉ. ÉQUATIONS DE LA DROITE

§ 66. LE PLAN EN TANT QUE SURFACE DU PREMIER DEGRÉ

Nous établirons dans les paragraphes suivants que les surfaces du premier degré sont des plans et rien que des plans et nous examinerons les diverses formes que peuvent revêtir les équations des plans.

214. Théorème 24. *Dans un système quelconque de coordonnées cartésiennes, tout plan est défini par une équation du premier degré.*

Démonstration. Etant donné un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, considérons un plan quelconque α et prouvons que ce plan est défini par une équation du premier degré. Prenons sur le plan α un point quelconque $M_0\,(x_0;\ y_0;\ z_0)$; choisissons de plus un vecteur quelconque non nul, perpendiculaire au plan α. Désignons le vecteur choisi par la lettre $\vec{n}$ et ses projections sur les axes de coordonnées par les lettres A, B, C.

Soit $M\,(x;\ y;\ z)$ un point quelconque. Il appartient au plan α si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{n}$. En d'autres termes, le point M appartenant au plan α est caractérisé par la condition

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}.$$

Nous obtiendrons l'équation du plan α si nous exprimons cette condition à l'aide des coordonnées x, y, z. A cet effet, inscrivons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$ et $\vec{n}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\},$$

$$\vec{n} = \{A;\ B;\ C\}.$$

Conformément au n° 181, pour que deux vecteurs soient perpendiculaires, il faut et il suffit que leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire si la somme des produits des coordonnées correspondantes de ces vecteurs prises deux par deux est nulle.

Par conséquent, $\overrightarrow{M_0M}$ est perpendiculaire à $\vec{n}$ si et seulement si

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (1)$$

C'est justement l'équation du plan que nous voulions trouver, puisque les coordonnées x, y, z du point M ne lui satisfont que dans le cas où M appartient au plan α (autrement dit, quand $\overrightarrow{M_0M}$ est perpendiculaire à $\vec{n}$).

Ouvrons les parenthèses et écrivons l'équation (1) sous la forme suivante

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0.$$

Ensuite, en désignant le nombre $-Ax_0-By_0-Cz_0$ par la lettre D, nous aurons :

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (2)$$

Nous voyons que le p l a n α est bien défini par une équation du p r e m i e r degré, ce qui démontre le théorème.

215. Tout vecteur (non nul) perpendiculaire à un plan quelconque est appelé vecteur *normal* à ce plan. Usant de ce terme, nous pouvons dire que *l'équation*

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

est l'équation du plan passant par le point $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *et dont le vecteur normal est* $\vec{n}=\{A; B; C\}$.

On appelle une équation de la forme

$$Ax+By+Cz+D=0$$

équation générale du plan.

216. T h é o r è m e 25. *Dans un système de coordonnées cartésiennes, toute équation du premier degré définit un plan.*

D é m o n s t r a t i o n. Considérant comme donné un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, examinons l'équation du premier degré

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (2)$$

Quand nous disons équation « quelconque », nous sous-entendons que les coefficients A, B, C, D peuvent être des nombres arbitraires, en excluant, naturellement, le cas où les trois coefficients A, B, C sont simultanément nuls. Nous devons démontrer que l'équation (2) est l'équation d'un plan.

Soit x_0, y_0, z_0 une solution quelconque de l'équation (2), c'est-à-dire un ensemble de trois nombres qui satisfont à cette équation *.

* Comme toute équation du premier degré à trois inconnues, l'équation (2) a une infinité de solutions. Pour trouver l'une quelconque de ces solutions, il suffit d'assigner des valeurs numériques à deux des inconnues et calculer dans l'équation la valeur de la troisième inconnue.

En substituant aux coordonnées courantes dans le premier membre de l'équation (2) les nombres x_0, y_0, z_0 nous obtenons l'identité arithmétique

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \qquad (3)$$

Soustrayons l'identité (3) de l'équation (2). Nous obtenons l'équation

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (1)$$

qui est, comme nous l'avons vu, l'équation du plan passant par le point M_0 $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et dont le vecteur normal est $\vec{n} = \{A ; B ; C\}$. Or, l'équation (2) est équivalente à l'équation (1) puisque (1) est obtenue de (2) en en retranchant terme à terme l'identité (3) et l'équation (2) à son tour est obtenue de l'équation (1) en lui ajoutant terme à terme l'identité (3). Par conséquent, l'équation (2) est bien l'équation du plan ci-dessus.

Nous avons prouvé qu'une équation quelconque du p r e m i e r degré définissait un p l a n. Notre théorème est donc démontré.

217. Les surfaces définies, dans un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par des équations du premier degré sont appelées, comme nous le savons, surfaces du premier degré. Usant de cette terminologie, nous pouvons énoncer le résultat obtenu de la façon suivante.

Tout plan est une surface du premier degré ; toute surface du premier degré est un plan.

E x e m p l e. Etablir l'équation du plan passant par le point M_0 (1 ; 1 ; 1) et perpendiculaire au vecteur $\vec{n} = \{2 ; 2 ; 3\}$.

S o l u t i o n. En vertu du n° 215 l'équation que nous cherchons est la suivante

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0$$

ou encore

$$2x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

218. En conclusion de ce paragraphe, prouvons la proposition suivante: *si deux équations* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ et $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ *déterminent un seul et même plan, leurs coefficients sont proportionnels.*

Dans ce cas, en effet, les vecteurs $\vec{n_1} = \{A_1 ; B_1 ; C_1\}$ et $\vec{n_2} = \{A_2 ; B_2 ; C_2\}$ sont perpendiculaires au même plan et donc colinéaires. Mais alors (v. n° 170) les nombres A_2, B_2, C_2 sont proportionnels aux nombres A_1, B_1, C_1 ; en désignant le coefficient de proportionnalité par μ nous aurons $A_2 = A_1\mu$, $B_2 = B_1\mu$, $C_2 = C_1\mu$. Soit M_0 $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ un point quelconque du plan. Ses coordonnées doivent satisfaire à chacune des deux équations, donc

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \quad \text{et} \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0.$$

Multiplions la première de ces deux égalités par μ et soustrayons le résultat de la deuxième. Il vient $D_2 - D_1\mu = 0$. Donc, $D_2 = D_1\mu$ et

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1} = \mu.$$

Ce qui prouve notre proposition.

§ 67. ÉQUATIONS INCOMPLÈTES DU PLAN. ÉQUATION DU PLAN EN FONCTION DES COORDONNÉES À L'ORIGINE

219. Nous savons que t o u t e équation du premier degré

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(dans un système de coordonnées cartésiennes) définit un plan. Etudions à présent certains cas particuliers de l'équation du premier degré, c'est-à-dire les cas où certains des coefficients A, B, C, D sont nuls:

1) $D = 0$; *l'équation prend la forme* $Ax + By + Cz = 0$ *et définit un plan passant par l'origine des coordonnées.*

En effet, les nombres $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ satisfont à l'équation $Ax + By + Cz = 0$. Par conséquent, l'origine des coordonnées appartient au plan.

2) $C = 0$; *l'équation prend la forme* $Ax + By + D = 0$ *et définit un plan parallèle à l'axe* Oz (ou contenant cet axe).

Dans ce cas, en effet, le vecteur normal $\vec{n} = \{A; B; C\}$ a une projection nulle sur l'axe Oz ($C = 0$); ce vecteur est donc perpendiculaire à l'axe Oz et le plan lui-même est parallèle à cet axe (ou le contient).

3) $B = 0$ et $C = 0$; *l'équation prend la forme* $Ax + D = 0$ *et définit un plan parallèle au plan de coordonnées* Oyz (ou qui se confond avec ce plan).

Effectivement, dans ce cas, le vecteur normal a des projections nulles sur les axes de coordonnées Oy et Oz ($B = 0$ et $C = 0$). Par conséquent, le vecteur $\vec{n}$ est perpendiculaire aux axes Oy et Oz et le plan leur est parallèle (ou les contient). Mais cela signifie précisément que le plan défini par l'équation $Ax + D = 0$ est parallèle au plan Oyz ou se confond avec lui. On peut s'en convaincre d'une autre façon: mettons l'équation $Ax + D = 0$ sous la forme $x = -\frac{D}{A}$ et posons $-\frac{D}{A} = a$. Il vient

$$a = x.$$

En vertu de cette équation, tous les points du plan ont des abscisses égales ($x = a$) et sont donc équidistants du plan Oyz (« en avant » si $a > 0$, « en arrière » si $a < 0$) ; par conséquent, le plan déterminé par cette équation est parallèle au plan Oyz. Il en découle avec évidence que a est la grandeur du segment que le plan découpe sur l'axe Ox (comptée à partir de l'origine des coordonnées). En particulier, si $D = 0$, nous aurons aussi $a = 0$. Dans ce dernier cas, le plan considéré se confond avec le plan Oyz. Donc, *l'équation* $x = 0$ *définit le plan* Oyz.

220. Par analogie avec ce qui vient d'être énoncé, il est facile d'établir que :

1. Une équation de forme $Ax + Cz + D = 0$ définit un plan parallèle à l'axe Oy (ou le contenant), une équation de forme $By + Cz + D = 0$ définit un plan parallèle à l'axe Ox (ou passant par cet axe).

2. Une équation de forme $By + D = 0$ définit un plan parallèle au plan Oxz (ou se confondant avec lui) ; une équation de forme $Cz + D = 0$ définit un plan parallèle au plan Oxy (ou se confondant avec lui). Ces deux dernières équations peuvent également être réduites à la forme $y = b$ et $z = c$. Ici b et c sont les grandeurs des segments que ces plans découpent sur les axes de coordonnées (sur l'axe Oy pour le premier et sur l'axe Oz pour le second). En particulier, l'équation $y = 0$ définit le plan Oxz et l'équation $z = 0$ définit le plan Oxy.

221. Soit l'équation d'un plan

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

aucun des coefficients A, B, C, D n'étant nul. Une telle équation peut être ramenée à une forme spéciale plus commode pour la solution de certains problèmes de géométrie analytique.

Reportons le terme constant D dans le second membre de l'équation. Nous aurons

$$Ax + By + Cz = -D.$$

Divisons ensuite les deux membres de l'équation par $-D$. Nous aurons :

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1,$$

ou

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

Adoptant les désignations

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C},$$

nous obtiendrons :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (1)$$

C'est précisément la forme spéciale de l'équation du plan que nous cherchions. Les nombres a, b, c ont ici un sens géométrique très simple. a, b, c sont les grandeurs des segments que le plan découpe sur les axes de coordonnées (comptées à partir de l'origine des coordonnées). Pour nous en convaincre, cherchons les points d'intersection du plan avec les axes de coordonnées. Le point d'intersection du plan et de l'axe Ox sera défini à l'aide de l'équation de ce plan $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ et des conditions supplémentaires $y=0$, $z=0$; d'où nous trouvons $x=a$ et, par conséquent, la grandeur du segment découpé par le plan sur l'axe Ox est bien égale à a. On établit de même que les segments découpés par le plan sur les axes Oy et Oz ont des grandeurs égales à b et c.

On appelle habituellement l'équation de forme (1) équation du plan en fonction des coordonnées à l'origine.

E x e m p l e. Former l'équation d'un plan sachant qu'il détermine sur les axes de coordonnées des segments $a=2$, $b=-3$, $c=4$.

S o l u t i o n. En vertu de ce qui vient d'être énoncé, nous obtenons l'équation cherchée d'emblée :

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1 \quad \text{ou} \quad 6x-4y+3z-12=0.$$

§ 68. ÉQUATION NORMALE DU PLAN. DISTANCE D'UN POINT A UN PLAN

222. Nous allons étudier encore une forme spéciale de l'équation du plan, connue sous le nom d'équation n o r m a l e du plan.

Soit un plan quelconque π. Menons par l'origine des coordonnées une droite n perpendiculaire au plan π, que nous appellerons *normale*, et désignons par la lettre P le point où cette droite perce le plan π (fig. 103). Nous considérerons sur la normale la direction allant du point O vers le point P comme positive (si le point P se confond avec le point O, c'est-à-dire si le plan passe par l'origine des coordonnées, nous choisirons arbitrairement le sens positif sur la normale). Désignons par α, β, γ les angles que fait la normale avec les axes de coordonnées et par p la longueur du segment OP.

Nous allons établir l'équation du plan π en considérant les nombres $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et p comme connus. Nous choisirons, à cet effet, un point quelconque M sur le plan π et nous désignerons ses coordonnées par x, y, z. Il est évident que la projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur la normale est égale à OP et, comme le sens positif de la normale coïncide avec la direction du vecteur $\overrightarrow{OP}$, la grandeur de

ce segment s'exprime par un nombre positif, précisément par le nombre p. Donc,

$$\text{Proj}_n \overrightarrow{OM} = p. \tag{1}$$

Remarquons à présent que $\overrightarrow{OM} = \{x; y; z\}$. D'où et en vertu du corollaire 3 du théorème 20 (n° 181)

$$\text{Proj}_n \overrightarrow{OM} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma. \tag{2}$$

Il découle des égalités (1) et (2) que $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ ou

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{3}$$

C'est justement l'équation du plan donné (nous voyons que les coordonnées x, y, z de chaque point M appartenant au plan lui satisfont; si, par contre, le point M n'appartient pas au plan, ses coordonnées ne satisfont pas à l'équation (3) car en ce cas $\text{Proj}_n \overrightarrow{OM} \neq p$).

L'équation d'un plan donnée sous la forme (3) *est dite équation normale du plan. Dans cette équation* $\cos\alpha$, $\cos\beta$ *et* $\cos\gamma$ *sont les cosinus directeurs de la normale et* p *la distance du plan à l'origine des coordonnées.*

223. Soit un plan quelconque. Construisons sa normale n et choisissons sur la normale un sens positif indiqué comme précédemment. Soit ensuite M^* un point quelconque de l'espace et d sa distance au plan donné (voir fig. 103).

Nous convenons d'appeler *écart* du point M^* au plan donné le nombre $+d$, si le point M^* se trouve du côté du plan correspondant au sens positif de la normale et $-d$ si M^* se trouve de l'autre côté du plan. Nous désignerons l'écart du point M^* par la lettre δ. Par conséquent, $\delta = \pm d$ et il est utile de remarquer que $\delta = +d$ quand le point M^* et l'origine des coordonnées se trouvent de part et d'autre du plan et que $\delta = -d$ quand le point M^* et l'origine des coordonnées se trouvent d'un même côté du plan (pour les points du plan $\delta = 0$).

T h é o r è m e 26. *Si le point* M^* *a pour coordonnées* $(x^*; y^*; z^*)$ *et si le plan est donné par son équation normale*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

l'écart du point M^* *par rapport à ce plan est donné par la formule*

$$\delta = x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\gamma - p. \tag{4}$$

Démonstration. Projetons le point M^* sur la normale; soit Q sa projection (voir fig. 103); alors

$$\delta = PQ = OQ - OP,$$

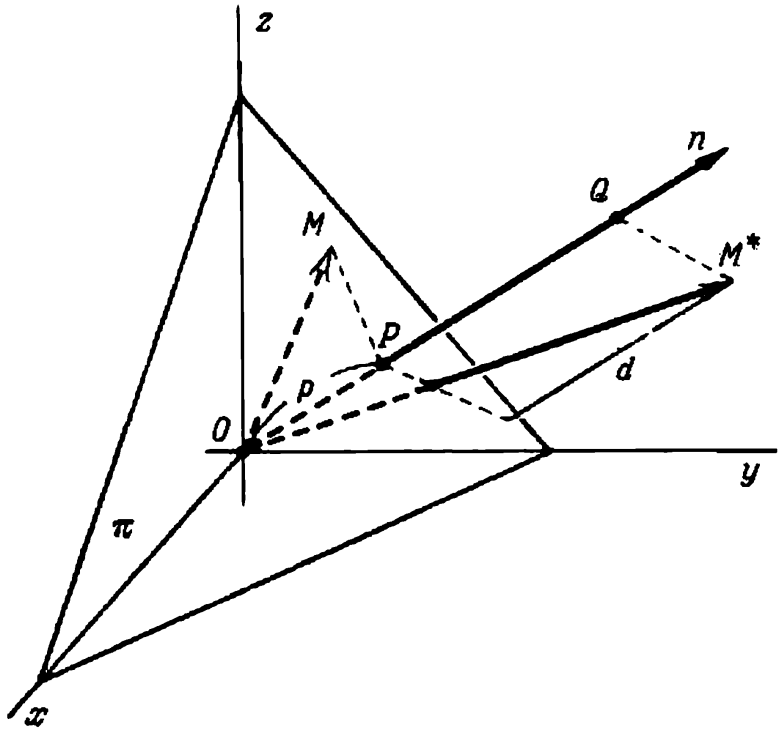


Fig. 103

où PQ, OQ et OP sont les grandeurs des segments orientés de la normale $\overline{PQ}$, $\overline{OQ}$ et $\overline{OP}$. Mais $OQ = \text{Proj}_n \overline{OM^*}$, $OP = p$; par conséquent,

$$\delta = \text{Proj}_n \overline{OM^*} - p. \tag{5}$$

En vertu du corollaire 3 du théorème 20 (n° 181)

$$\text{Proj}_n \overline{OM^*} = x^* \cos\alpha + y^* \cos\beta + z^* \cos\gamma. \tag{6}$$

Les équations (5) et (6) nous donnent

$$\delta = x^* \cos\alpha + y^* \cos\beta + z^* \cos\gamma - p.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons à présent que $x^* \cos\alpha + y^* \cos\beta + z^* \cos\gamma - p$ n'est rien d'autre que le premier membre de l'équation normale du plan considéré où les coordonnées courantes sont remplacées par les coordonnées du point M^*. D'où nous pouvons déduire la règle:

Pour trouver l'écart d'un point quelconque M^* par rapport à un plan, il faut remplacer dans le premier membre de l'équation de ce plan

les coordonnées courantes par les coordonnées du point M. Le nombre obtenu sera égal à l'écart cherché.*

Remarque. Si l'on cherche la distance d'un point à un plan, il suffit de calculer l'écart suivant la règle que nous venons d'énoncer et de prendre sa valeur absolue.

224. Nous allons montrer à présent comment ramener l'équation générale du plan à sa forme normale. Soit

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{7}$$

l'équation générale du plan et

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{3}$$

son équation normale.

Etant donné que les équations (7) et (3) définissent un seul et même plan, en vertu du n° 218, les coefficients de ces équations sont proportionnels. Cela signifie que, en multipliant tous les termes de l'équation (7) par un certain facteur μ, nous obtiendrons l'équation

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0$$

qui coïncide avec l'équation (3), c'est-à-dire nous aurons

$$\mu A = \cos\alpha, \quad \mu B = \cos\beta, \quad \mu C = \cos\gamma, \quad \mu D = -p. \tag{8}$$

Pour trouver le facteur μ, élevons les trois premières égalités (8) au carré et additionnons. Il vient

$$\mu^2 (A^2 + B^2 + C^2) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

Mais conformément au n° 156, le deuxième membre de cette dernière égalité est égal à 1. Par conséquent,

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{9}$$

Le nombre μ, pris comme facteur permettant de ramener l'équation générale du plan à sa forme normale, est appelé *facteur normalisant* de cette équation. Le facteur normalisant est déterminé par la formule (9), mais pas entièrement. Il faut encore préciser le signe. Pour déterminer le signe du facteur normalisant, on utilise la quatrième égalité (9). Conformément à cette égalité $\mu D = -p$. μD est donc un nombre négatif. Par conséquent:

Le signe du facteur normalisant est contraire à celui du terme constant de l'équation à normaliser.

Remarque. Si $D = 0$, le signe du facteur normalisant peut être choisi arbitrairement.

Exemple. Soient le plan $3x - 4y + 12z + 14 = 0$ et le point $M(4; 3; 1)$. Trouver l'écart de ce point au plan.

Solution. Pour appliquer la règle au n° 223, il faut, tout d'abord, ramener cette équation à sa forme normale.

A cet effet, trouvons le facteur normalisant:

$$\mu = \frac{-1}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}} = -\frac{1}{13}.$$

En multipliant l'équation donnée par μ, nous trouvons l'équation normale du plan:

$$-\frac{1}{13}(3x-4y+12z+14)=0.$$

En remplaçant dans le premier membre les coordonnées variables par les coordonnées du point M nous trouvons:

$$\delta = -\frac{1}{13}(3\cdot 4-4\cdot 3+12\cdot 1+14) = -2.$$

Le point M a donc un écart négatif par rapport à ce plan et se trouve à une distance $d=2$.

§ 69. ÉQUATIONS DE LA DROITE

225. Nous avons déjà indiqué au n° 207 qu'en géométrie analytique dans l'espace toute courbe est considérée comme l'intersection

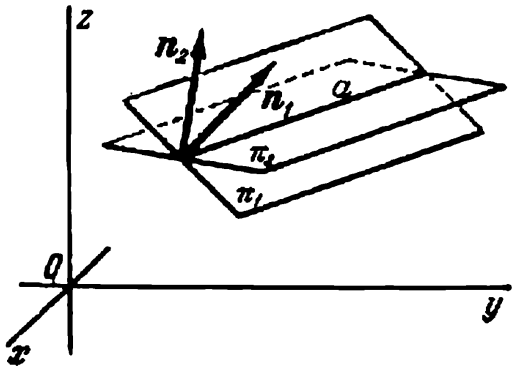


Fig. 104

de deux surfaces et se définit par deux équations. En particulier, nous considérerons toute ligne d r o i t e comme l'intersection de deux p l a n s et nous la définirons donc par deux équations du p r e m i e r degré (en coordonnées cartésiennes, naturellement).

Soit un système de coordonnées cartésiennes orthogonales dans l'espace. Considérons une droite quelconque et désignons-la par la lettre a (fig. 104). Désignons par π_1 et π_2 deux plans différents qui se coupent suivant la droite a et supposons que les équations de ces plans nous sont connues. Ecrivons-les sous la forme

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{et} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Etant donné que notre droite est la ligne d'intersection des plans π_1 et π_2, elle est définie par le système de deux équations:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

226. Supposons qu'on nous donne deux équations quelconques du premier degré (de la forme (1)). Définissent-elles toujours une droite? Il est évident que cela ne se produira qu'au cas où les plans que les équations définissent ne sont pas parallèles ou ne coïncident pas, c'est-à-dire quand les vecteurs normaux de ces plans $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ et $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ ne sont pas colinéaires. Rappelons que deux vecteurs sont colinéaires quand leurs coordonnées sont proportionnelles (voir n° 170); on en conclut:

Pour que deux équations de la forme (1) *constituent un système définissant une droite, il faut et il suffit que les coefficients de l'une d'elles ne soient pas proportionnels aux coefficients de l'autre.*

227. Par toute droite passe une infinité de plans; il est donc évident que l'on peut choisir d'une infinité de manières un couple de plans. Il s'ensuit donc que l'on peut définir une droite par deux équations d'une infinité de façons. Nous allons indiquer à présent un procédé très simple qui permet, *connaissant les équations de deux plans passant par une droite donnée, de « combiner », à l'aide de ces deux équations, autant d'équations que nous voudrons et qui définiront chacune un plan passant également par cette droite.*

Soient une droite quelconque a et équations de deux plans π_1 et π_2 passant par cette droite:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{et} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Choisissons deux nombres quelconques, non nuls simultanément, α, β et établissons l'égalité

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (2)$$

soit encore

$$(\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2)z+(\alpha D_1+\beta D_2)=0. \qquad (3)$$

Il est facile de se convaincre que les trois nombres $\alpha A_1+\beta A_2$, $\alpha B_1+\beta B_2$ et $\alpha C_1+\beta C_2$ ne peuvent être simultanément nuls. En effet, si $\alpha A_1+\beta A_2=0$, $\alpha B_1+\beta B_2=0$, $\alpha C_1+\beta C_2=0$, il vient

$$\frac{A_1}{A_2}=-\frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{B_1}{B_2}=-\frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{C_1}{C_2}=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Etant donné que α et β ne sont pas nuls simultanément, le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ ne peut être indéterminé. Il découle donc des proportions précé-

dentes que A_1, B_1, C_1 sont proportionnels à A_2, B_2, C_2, c'est-à-dire que les vecteurs normaux des plans donnés $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ et $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ sont colinéaires. Or, c'est impossible, car les plans donnés ne sont ni parallèles ni confondus.

Etant donné que les trois nombres $\alpha A_1 + \beta A_2$, $\alpha B_1 + \beta B_2$, $\alpha C_1 + \beta C_2$ ne peuvent être simultanément nuls, l'égalité (3) est une équation. Il est évident que c'est une équation du premier degré qui définit donc un certain plan.

Comme l'équation (3) découle des équations

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{et} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

tout système de trois nombres $(x; y; z)$ satisfaisant à ces deux équations satisfait également à l'équation (3), d'où il en découle que tout point situé à l'intersection des plans π_1 et π_2 appartient également au plan défini par l'équation (3). Autrement dit, l'équation (3) (ou l'équation (2) qui lui est équivalente) définit un plan passant par la droite a.

Ainsi donc, *si*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \textit{et} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

sont les équations de deux plans passant par une droite quelconque, l'équation

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (2)$$

définit un plan passant par cette même droite.

En nous appuyant sur cet énoncé, nous pouvons simplifier les équations d'une droite. Par exemple, les équations

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + 3 &= 0, \\ x + y - z - 5 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

peuvent être remplacées par d'autres plus simples si nous prenons d'abord $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, puis $\alpha = 1$ et $\beta = -1$. En effet, nous aurons ainsi les équations

$$\left.\begin{aligned} x + y - 1 &= 0, \\ z + 4 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

qui définissent la même droite.

228. Soit une droite a quelconque définie par les équations

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

en tant qu'intersection de deux plans π_1 et π_2. Nous savons que l'équation

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (2)$$

pour toute valeur numérique de α, β (non nuls simultanément) définit un plan passant par la droite a. Prouvons qu'il est toujours possible de choisir les valeurs de α et β de façon que l'équation (2) définisse n'importe quel plan donné passant par a.

Etant donné que tout plan passant par la droite a est défini par la droite a et un point situé hors de cette droite, il suffit de montrer pour prouver notre proposition qu'il est toujours possible de choisir dans l'équation (2) les nombres α et β de façon que le plan ainsi déterminé passe par n'importe quel point fixé à l'avance M^* $(x^*;\ y^*;\ z^*)$.

Or, c'est évident; en effet, le plan défini par l'équation (2) passera par le point M^* si les coordonnées du point M^* satisfont à cette équation, c'est-à-dire si

$$\alpha(A_1x^*+B_1y^*+C_1z^*+D_1)+\beta(A_2x^*+B_2y^*+C_2z^*+D_2)=0. \qquad (4)$$

Supposons que le point M^* n'appartient pas à la droite a (c'est le seul cas qui nous intéresse). Alors, l'un au moins des nombres $A_1x^*+B_1y^*+C_1z^*+D_1$, $A_2x^*+B_2y^*+C_2z^*+D_2$ n'est pas nul et, par conséquent, l'équation (4) est une équation du premier degré à deux inconnues α, β. Pour trouver les inconnues α et β, il suffit d'assigner à l'une de ces inconnues une valeur arbitraire et de calculer l'autre à partir de l'équation. Par exemple, si $A_2x^*+B_2y^*+C_2z^*+D_2\neq 0$, on peut choisir α arbitrairement (mais non nul) en calculant β à partir de l'égalité :

$$\beta=-\frac{A_1x^*+B_1y^*+C_1z^*+D_1}{A_2x^*+B_2y^*+C_2z^*+D_2}\alpha.$$

Ainsi donc, on peut à l'aide de l'équation (2) définir un plan passant par n'importe quel point de l'espace fixé à l'avance et, par suite, n'importe quel plan passant par la droite donnée a.

229. *L'ensemble de tous les plans passant par une seule et même droite est appelé faisceau de plans. L'équation de la forme* (2) *est dite équation d'un faisceau de plans*, étant donné que les diverses valeurs de α et β définissent tous les plans du faisceau donné.

Si $\alpha\neq 0$, nous obtiendrons, en posant $\frac{\beta}{\alpha}=\lambda$, à partir de l'équation (2)

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \qquad (5)$$

Dans la pratique de la résolution des problèmes, l'équation du faisceau de plans est plus usitée sous la forme (5) que sous la forme (2). Il est toutefois important de remarquer qu'en passant de la forme (2) à la forme (5) on exclut le cas où $\alpha=0$, ce qui rend impos-

sible la définition du plan $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, c'est-à-dire, pour les différentes valeurs de λ, l'équation de la forme (5) définit tous les plans du faisceau à l'exception d'un seul (deuxième plan défini par le système d'équations (1)).

§ 70. VECTEUR DIRECTEUR DE LA DROITE. ÉQUATIONS CANONIQUES DE LA DROITE. ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES DE LA DROITE

230. On utilise, pour la commodité de la solution d'une série de problèmes de géométrie analytique, une forme spéciale d'équations de la droite que nous allons donner. Cette forme spéciale de

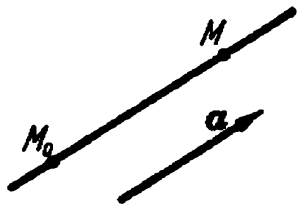


Fig. 105

l'équation de la droite peut être obtenue à partir de ses équations générales à l'aide de transformations algébriques. Nous préférerons toutefois l'établir directement de façon à rendre plus évident le sens géométrique.

231. Soit une droite quelconque. *Tout vecteur non nul appartenant à cette droite ou parallèle à cette droite est appelé vecteur directeur de la droite.* Les vecteurs indiqués sont dits directeurs parce que n'importe lequel d'entre eux, étant donné, définit la direction de la droite.

Nous désignerons le vecteur directeur d'une droite arbitraire par a et ses coordonnées par les lettres l, m, n :

$$\vec{a} = \{l\,;\ m\,;\ n\}.$$

Nous allons établir maintenant *l'équation d'une droite passant par le point* $M_0\ (x_0\,;\ y_0\,;\ z_0)$ *et ayant pour vecteur directeur le vecteur* $\vec{a} = \{l\,;\ m\,;\ n\}$.

Il est très facile d'obtenir ces équations. Soit $M\ (x\,;\ y\,;\ z)$ un point quelconque (« mobile ») de la droite (fig. 105). Le vecteur

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0\,;\ y - y_0\,;\ z - z_0\}$$

est colinéaire au vecteur directeur

$$\vec{a} = \{l\,;\ m\,;\ n\}.$$

Par conséquent, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ sont proportionnelles aux coordonnées du vecteur $\vec{a}$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{1}$$

Nous voyons que les coordonnées de tout point $M(x; y; z)$ appartenant à la droite considérée satisfont à ces relations. Par contre, si le point $M(x; y; z)$ n'appartient pas à la droite, ses coordonnées ne satisfont pas aux relations (1) car dans ce cas les vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$ et $\vec{a}$ ne sont pas colinéaires et leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Par conséquent, les équations (1) sont celles de la droite passant par le point $M_0(x_0; y_0; z_0)$ et ayant la direction indiquée par le vecteur $\vec{a}=\{l; m; n\}$.

Nous appellerons les équations de forme spéciale que nous venons d'obtenir équations *canoniques*.

Les coordonnées l, m, n de tout vecteur directeur $\vec{a}$ de la droite sont appelées *paramètres directeurs* de cette droite. Les cosinus directeurs du vecteur $\vec{a}$ sont également appelés *cosinus directeurs* de la même droite.

232. Soit une droite quelconque définie par deux équations générales:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Nous allons montrer comment on établit l'équation canonique de cette droite.

Désignons par π_1 et π_2 les plans définis par les deux équations données et par n_1 et n_2 les vecteurs normaux de ces plans.

Pour obtenir les équations canoniques de la droite donnée, il faut:

1) trouver un point quelconque $M_0(x_0; y_0; z_0)$; il faut pour cela choisir une valeur numérique arbitraire pour une des coordonnées inconnues x_0, y_0, z_0, remplacer la coordonnée choisie par cette valeur dans les équations (2) et résoudre ensuite le système d'équations (2). Nous obtiendrons les valeurs des deux autres coordonnées;

2) trouver le vecteur directeur $\vec{a}=\{l; m; n\}$. Etant donné que la droite est définie par l'intersection des plans π_1 et π_2 (voir fig. 104), elle est perpendiculaire à chacun des vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$. C'est pourquoi on peut prendre en qualité de vecteur $\vec{a}$ tout vecteur perpendiculaire aux vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$, par exemple leur produit vectoriel: $\vec{a}=[\vec{n}_1\vec{n}_2]$. Comme les coordonnées des vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$

sont connues: $\vec{n_1} = \{A_1; B_1; C_1\}$, $\vec{n_2} = \{A_2; B_2; C_2\}$, il suffit d'appliquer le théorème 21 (n° 189) pour calculer les coordonnées du vecteur $\vec{a} = \{l; m; n\}$.

Exemple. Trouver les équations canoniques de la droite

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y+4z-11=0, \\ 2x+y-3z-1=0. \end{aligned}\right\}$$

Solution. En prenant, par exemple, $x_0 = 1$, nous trouvons à partir du système donné $y_0 = 2$, $z_0 = 1$. Nous connaissons donc déjà un point de la droite $M_0(1; 2; 1)$. Trouvons à présent le vecteur directeur. Nous avons $\vec{n_1} = \{3; 2; 4\}$, $\vec{n_2} = \{2; 1; -3\}$; d'où $\vec{a} = [\vec{n_1}\vec{n_2}] = \{-10; 17; -1\}$, c'est-à-dire $l = -10$, $m = 17$, $n = -1$. Nous obtiendrons les équations canoniques de la droite donnée en remplaçant, dans les équations (1), x_0, y_0, z_0 et l, m, n par les valeurs que nous venons de trouver:

$$\frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{-1}.$$

233. Soient les équations canoniques d'une droite quelconque. Désignons par t chacun des rapports qui interviennent dans les équations canoniques; il vient:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t.$$

D'où

$$\left.\begin{aligned} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ce sont les *équations paramétriques de la droite passant par le point* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *dans la direction du vecteur* $\vec{a} = \{l; m; n\}$. Dans les équations (3) t est considéré comme un paramètre variant arbitrairement et x, y, z comme des fonctions de t. Lorsque t varie, les grandeurs x, y, z varient également de façon que le point $M(x; y; z)$ se déplace le long de la droite donnée. Il est commode d'user des équations paramétriques quand il s'agit de trouver le point d'intersection d'une droite et d'un plan.

Exemple. Soit la droite

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$$

et soit également le plan $2x + y + z - 6 = 0$. Trouver leur point d'intersection.

Solution. Il s'agit de déterminer x, y, z à partir des trois équations données (les deux équations de la droite et l'équation du plan). Les calculs indis-

pensables seront plus simples si nous augmentons le nombre des inconnues jusqu'à quatre (ainsi que le nombre d'équations) en posant:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}=t. \quad \text{D'où}$$

$$x=2+t, \quad y=3+t, \quad z=4+2t.$$

En reportant ces expressions dans le premier membre de l'équation du plan, nous aboutissons, tout de suite, à une équation du premier degré à une inconnue

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0.$$

Cette équation nous donne $t=-1$ et, par conséquent, les coordonnées du point que nous cherchons sont $x=1$, $y=2$, $z=2$.

234. Supposons que t soit le nombre de secondes écoulées depuis un certain moment (« moment de mise en marche du chronomètre ») et considérons les équations (3) comme les équations de mouvement du point $M(x; y; z)$ (voir n° 45). Essayons d'élucider le caractère de ce mouvement.

Il est tout d'abord évident, à la suite de ce qui vient d'être énoncé, que le mouvement du point M est rectiligne et suit une droite passant par le point $M_0(x_0; y_0; z_0)$ dans la direction du vecteur $\vec{a}=\{l, m, n\}$.

Il est, de plus, facile de se convaincre que le mouvement du point M défini par les équations (3) est un mouvement *uniforme*. En effet, en vertu des équations (3), nous avons

$$x-x_0=lt, \quad y-y_0=mt, \quad z-z_0=nt.$$

Ces trois dernières égalités sont équivalentes à une seule équation vectorielle:

$$\overrightarrow{M_0M}=\vec{a}t.$$

Nous voyons donc qu'en un laps de temps de t secondes le point M parcourt un chemin $\overrightarrow{M_0M}$ égal au vecteur $\vec{a}$ allongé « t fois ». Par conséquent, le chemin parcouru par le point M est proportionnel au temps t, ce qui précisément montre que le mouvement du point M est uniforme.

Calculons enfin la vitesse du point M. Dans ce but, remarquons que pendant la première seconde (de $t=0$ à $t=1$) le point M parcourt un chemin $\overrightarrow{M_0M}=\vec{a}$. Par conséquent, la vitesse de déplacement du point M est numériquement égale au module du vecteur $\vec{a}$, c'est-à-dire $v=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$. Ainsi donc, les *équations* (3) *définissent un mouvement uniforme rectiligne du point* $M(x; y; z)$ *à une vitesse* $v=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$ *dans la direction du vecteur* $\vec{a}=\{l, m, n\}$. Le point $M_0(x_0; y_0; z_0)$ définit la position d'origine du point variable $M(x; y; z)$ (autrement dit pour $t=0$ le point M se confond avec le point M_0).

Exemple. Ecrire l'équation du mouvement d'un point M (x, y, z) dont la position d'origine est M_0 (1 ; 1 ; 1) et qui se déplace uniformément et en ligne droite dans la direction du vecteur $\vec{s} = \{2; 3; 6\}$ à une vitesse $v = 21$.

Solution. Comparant le module du vecteur $\vec{s}$, qui est égal à $\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$ à la vitesse donnée, nous voyons que nous devons prendre en qualité de vecteur $\vec{a}$ le vecteur $\vec{s}$ multiplié par trois, c'est-à-dire $\vec{a} = \{6; 9; 18\}$. Les équations que nous cherchons sont

$$x=1+6t, \quad y=1+9t, \quad z=1+18t.$$

§ 71. PROPOSITIONS SUPPLÉMENTAIRES ET EXEMPLES

235. Il est souvent nécessaire en géométrie analytique d'établir l'équation d'une droite connaissant deux de ses points. Nous allons résoudre ce problème dans le cas général, considérant comme étant donnés deux points:

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad \text{et} \quad M_2(x_2; y_2; z_2).$$

Pour résoudre le problème, il suffit de remarquer que l'on peut prendre en qualité de vecteur directeur de la droite considérée le vecteur $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$. D'où

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1.$$

En fixant au point $M_1(x_1; y_1; z_1)$ le rôle joué dans le n° 231 par le point M_0, nous aurons:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Ce sont précisément les *équations* (canoniques) *de la droite passant par deux points donnés*: $M_1(x_1; y_1; z_1)$ et $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

236. Résolvons également le cas général du problème suivant: établir l'équation du plan passant par les trois points différents: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$.

Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M de l'espace et considérons les trois vecteurs:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x-x_1; y-y_1; z-z_1\}, \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3-x_1; y_3-y_1; z_3-z_1\}.$$

Pour que le point M appartienne au plan $M_1M_2M_3$, il faut et il suffit que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$ soient coplanaires. Or, d'après le n° 201, pour que ces trois vecteurs soient coplanaires, il

faut et il suffit que le déterminant du troisième ordre ayant pour éléments les coordonnées de ces vecteurs soit nul. Dans le cas présent nous avons:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est précisément *l'équation du plan passant par les points* M_1, M_2, M_3, car les coordonnées x, y, z du point M y satisfont si et seulement si ce point appartient au plan.

237. Il est nécessaire, pour certains problèmes de géométrie analytique, de connaître les *conditions de parallélisme et de perpendicularité* de deux plans, de deux droites ainsi que d'une droite et d'un plan. Voyons donc ces conditions.

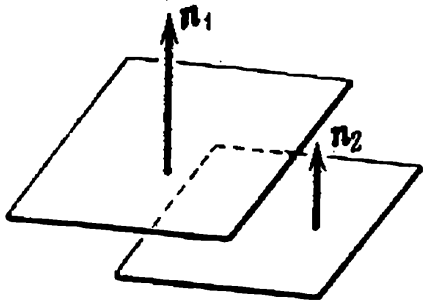


Fig. 106

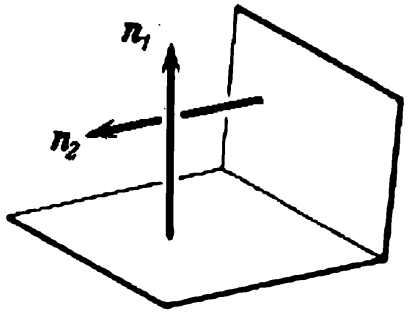


Fig. 107

1) Soient deux plans

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{aligned}\right\}$$

Les plans donnés sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux $\vec{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$ et $\vec{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$ sont colinéaires (fig. 106; nous considérons le cas où les plans sont confondus comme un cas particulier de parallélisme). D'où, et en vertu du n° 170, nous trouvons la *condition de parallélisme de deux plans*:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}.$$

Pour que les plans donnés soient perpendiculaires il faut et il suffit que leurs vecteurs normaux soient perpendiculaires (fig. 107).

D'où, et en vertu du n° 181, nous obtenons la *condition de perpendicularité de deux plans*:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

2) Soient deux droites

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$
$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Pour que ces droites soient parallèles, il faut et il suffit que leurs vecteurs directeurs $\vec{a}_1=\{l_1, m_1, n_1\}$, $\vec{a}_2=\{l_2, m_2, n_2\}$ soient

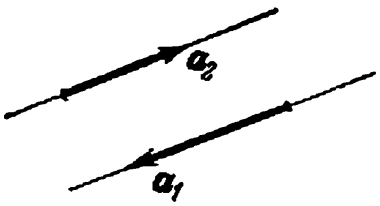


Fig. 108

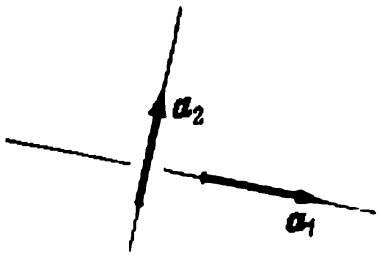


Fig. 109

colinéaires (fig. 108; le cas où les droites se confondent est considéré comme un cas particulier de parallélisme). D'où nous obtenons la *condition de parallélisme de deux droites*:

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{m_2}{m_1}=\frac{n_2}{n_1}.$$

Pour que ces deux droites soient perpendiculaires, il faut et il suffit que leurs vecteurs directeurs soient perpendiculaires (fig. 109; dans l'espace deux perpendiculaires peuvent ne pas se couper).

De là, la *condition de perpendicularité de deux droites est*

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

3) Soit la droite

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

et le plan

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Pour que la droite soit parallèle au plan, il faut et il suffit que le vecteur directeur de cette droite $\vec{a}=\{l, m, n\}$ soit perpendiculaire au vecteur normal du plan $\vec{n}=\{A, B, C\}$ (fig. 110; le cas où la droite appartient au plan étant considéré comme un cas particulier de parallélisme), ce qui nous donne la *condition du parallélisme d'une droite et d'un plan*:

$$Al+Bm+Cn=0.$$

Pour que la droite soit perpendiculaire au plan, il faut et il suffit que le vecteur directeur de cette droite soit colinéaire au

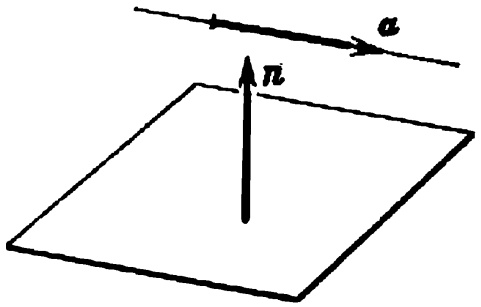


Fig. 110

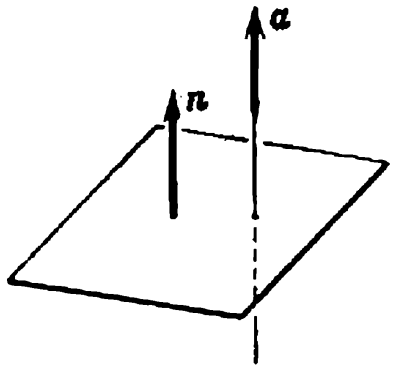


Fig. 111

vecteur normal du plan (fig. 111), ce qui nous donne la *condition de perpendicularité d'une droite à un plan*:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

Nous donnons ci-dessous quelques exemples avec des données numériques.

238. Exemple 1. Ecrire l'équation du plan passant par la droite

$$\left.\begin{aligned}3x+2y+5z+6&=0,\\ x+4y+3z+4&=0\end{aligned}\right\}$$

et parallèle à la droite

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-3}.$$

Solution. Etablissons l'équation du faisceau de plans passant par la droite donnée (voir nos 228, 229).

$$3x+2y+5z+6+\lambda(x+4y+3z+4)=0. \qquad (1)$$

Nous devons choisir dans ce faisceau un plan parallèle à la seconde droite donnée. Il s'agit donc de trouver la valeur numérique voulue de λ. Ecrivons l'équation (1) sous la forme:

$$(3+\lambda)x+(2+4\lambda)y+(5+3\lambda)z+(6+4\lambda)=0. \qquad (2)$$

Le plan que nous cherchons doit être parallèle à la droite

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-3}.$$

En utilisant les conditions de parallélisme d'une droite et d'un plan nous trouvons pour l'inconnue λ l'équation

$$3(3+\lambda)+2(2+4\lambda)-3(5+3\lambda)=0.$$

D'où $\lambda=1$. En substituant la valeur trouvée pour λ dans l'équation (2), nous trouvons: $4x+6y+8z+10=0$ ou $2x+3y+4z+5=0$.

Exemple 2. Soit la droite

$$\left.\begin{aligned}3x-2y-z+4&=0,\\ x-4y-3z-2&=0.\end{aligned}\right\}$$

Trouver sa projection sur le plan $5x + 2y + 2z - 7 = 0$.

Solution. Nous devons trouver l'équation du plan passant par cette droite et perpendiculaire au plan donné. La projection que nous cherchons sera alors déterminée comme l'intersection de ce plan avec le plan donné. Ecrivons l'équation du faisceau de plans passant par la droite donnée:

$$3x-2y-z+4+\lambda(x-4y-3z-2)=0. \qquad (3)$$

Le plan que nous cherchons sera défini par cette équation pour une certaine valeur de λ que nous devrons trouver. Écrivons cette équation sous la forme

$$(3+\lambda)x+(-2-4\lambda)y+(-1-3\lambda)z+(4-2\lambda)=0. \qquad (4)$$

Le plan que nous cherchons doit être perpendiculaire au plan donné. En partant de la condition de perpendicularité de deux plans, nous calculons l'inconnue λ dans l'équation

$$5(3+\lambda)+2(-2-4\lambda)+2(-1-3\lambda)=0.$$

D'où $\lambda=1$.

En remplaçant dans l'équation (4) λ par sa valeur, nous trouverons l'équation du plan passant par la droite donnée et perpendiculaire au plan donné: $4x - 6y - 4z + 2 = 0$ ou $2x - 3y - 2z + 1 = 0$. La projection de ce plan sur le plan donné est définie par les équations

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y-2z+1=0,\\ 5x+2y+2z-7=0. \end{aligned}\right\}$$

Exemple 3. Trouver la distance du point $P(1; 1; 1)$ à la droite

$$\frac{x-11}{2}=\frac{y-18}{5}=\frac{z-4}{-2}.$$

Solution. Faisons passer par P un plan α perpendiculaire à la droite donnée et cherchons le point d'intersection Q de ce plan avec la droite. La distance du point P à la droite sera égale à la distance du point P au point Q.

Conformément au n° 215, on peut écrire l'équation du plan α sous la forme

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0;$$

ce plan doit être perpendiculaire à la droite donnée. La condition de perpendicularité nous donne

$$\frac{A}{2}=\frac{B}{5}=\frac{C}{-2}.$$

En choisissant ici pour plus de simplicité le facteur de proportionnalité égal à 1, nous trouvons $A = 2$, $B = 5$, $C = -2$. Ainsi donc, l'équation du plan est $2(x - 1) + 5(y - 1) - 2(z - 1) = 0$ ou $2x + 5y - 2z - 5 = 0$. Nous devons à présent trouver le point d'intersection Q du plan et de la droite donnée. Il convient, à cet effet, de résoudre le système formé par les équations de la droite donnée et l'équation du plan que nous venons de définir.

En procédant comme indiqué au n° 233 (voir exemple à la fin de ce numéro), nous trouverons les coordonnées du point Q: $x = 5$, $y = 3$, $z = 10$. Nous trouverons à présent la distance du point donné à la droite donnée, qui est égale à la distance d entre les points P et Q, d'après la formule déjà connue:

$$d=\sqrt{(5-1)^2+(3-1)^2+(10-1)^2}=\sqrt{101}\approx 10.$$

CHAPITRE XIII

SURFACES DU SECOND DEGRÉ. TRANSFORMATION DES COORDONNÉES

§ 72. SURFACES DU SECOND DEGRÉ. ELLIPSOÏDE ET HYPERBOLOÏDE

239. Conformément à ce qui a été dit au n° 210, les surfaces définies dans un système de coordonnées cartésiennes par des équations du second degré sont des surfaces du second degré. Au n° 212, nous avons écrit l'équation générale du deuxième degré sous la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0. \quad (1)$$

Il est cependant d'usage, en géométrie analytique, d'utiliser une forme quelque peu différente, soit

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0. \quad (2)$$

On désigne donc par les lettres D, E, F, G, H, K la moitié des coefficients correspondants. Par exemple, si nous avons l'équation

$$3x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 3xz + z + 5 = 0, \text{ alors}$$

$$A = 3, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 2, \quad E = \frac{3}{2}, \quad F = 0, \quad G = 0, \quad H = 0,$$

$$K = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad L = 5.$$

Dans la suite de l'exposé nous n'userons que de la forme (2).

240. Considérons l'équation incomplète suivante

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0, \quad (3)$$

A, B, C et L étant différents de zéro.

La surface que définit une telle équation dans un système de coordonnées cartésiennes orthogonales est appelée

ellipsoïde si A, B, C sont des nombres de même signe, L étant de signe contraire,

hyperboloïde si un des nombres A, B, C est de signe contraire aux deux autres.

241. Etudions l'*ellipsoïde*. Comme nous l'avons déjà énoncé, l'ellipsoïde est une surface du second degré définie dans un système

de coordonnées cartésiennes orthogonales par l'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0 \tag{3}$$

à condition que A, B, C soient des nombres de même signe et que L soit de signe contraire.

Nous allons à présent transformer l'équation (3) pour lui donner une forme spéciale. Faisons passer L dans le deuxième membre de l'équation; nous aurons $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = -L$ ou

$$\frac{x^2}{-\frac{L}{A}} + \frac{y^2}{-\frac{L}{B}} + \frac{z^2}{-\frac{L}{C}} = 1. \tag{4}$$

Remarquons à présent que comme A et L sont de signes contraires, le nombre $\frac{L}{A}$ est négatif et, par conséquent, $-\frac{L}{A}$ est un nombre positif. Il en est de même pour $-\frac{L}{B}$ et $-\frac{L}{C}$. Il s'ensuit que $+\sqrt{-\frac{L}{A}}$, $+\sqrt{-\frac{L}{B}}$, $+\sqrt{-\frac{L}{C}}$ sont des nombres (positifs) réels. Désignons-les respectivement par les lettres a, b, c. Il vient:

$$-\frac{L}{A} = a^2, \quad -\frac{L}{B} = b^2, \quad -\frac{L}{C} = c^2.$$

Prenant en considération ces relations, nous pouvons écrire l'équation (4) comme suit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{5}$$

L'équation (5) est dite *équation canonique de l'ellipsoïde.*

Essayons de préciser la forme de l'ellipsoïde et de le représenter. Nous userons à cet effet de la méthode dite des « sections parallèles ».

Considérons les sections de l'ellipsoïde par des plans parallèles au plan de coordonnées Oxy. Chacun de ces plans est défini par une équation de forme $z = h$ et la ligne, obtenue comme section, par deux équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z &= h. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Cela nous indique que

1) si $|h| < c$, le plan $z = h$ coupe l'ellipsoïde suivant l'ellipse dont les demi-axes sont

$$a^* = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}},$$

$$b^* = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}},$$

et qui est symétrique par rapport aux plans *Oxz* et *Oyz*; 2) les grandeurs a^* et b^* atteignent leur plus grande valeur pour $h = 0$ (alors $a^* = a$, $b^* = b$); autrement dit, la plus grande ellipse résulte de l'intersection de l'ellipsoïde et du plan $z = 0$; 3) lorsque h croît a^* et b^* décroissent; 4) lorsque $h = \pm c$ les grandeurs a^* et b^* deviennent nulles, autrement dit, l'ellipse résultant de l'intersection

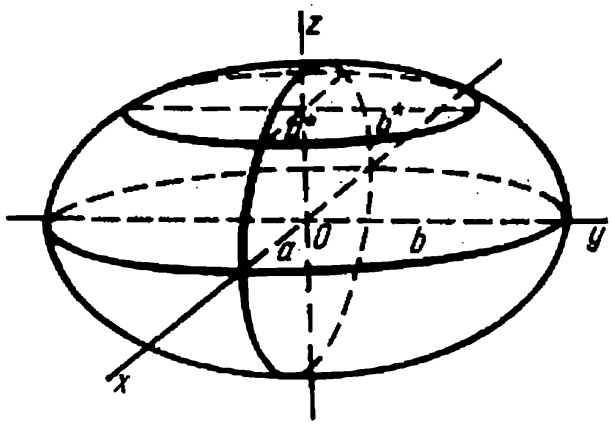


Fig. 112

de l'ellipsoïde et du plan $z = c$, ou du plan $z = -c$, dégénère en un point; autrement dit, les plans $z = \pm c$ sont tangents à l'ellipsoïde; 5) lorsque $|h| > c$ les équations (6) définissent une ellipse imaginaire, ce qui signifie que le plan $z = h$ n'a aucun point commun avec l'ellipsoïde.

On obtient un tableau tout à fait analogue lors des intersections de l'ellipsoïde par des plans parallèles aux plans *Oxz* et *Oyz*. Remarquons seulement que le plan *Oxz* lui-même coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse définie par les équations $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ et $y = 0$ et le plan *Oyz* suivant une ellipse définie par les équations $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ et $x = 0$ (voir fig. 112 où sont représentées les sections de l'ellipsoïde par les plans *Oxy*, *Oxz* et $z = h$).

En résumant ce que nous venons d'énoncer, nous pouvons conclure que l'ellipsoïde est une surface ovale fermée, ayant trois plans de symétrie perpendiculaires deux à deux. Dans le système de coordonnées choisi, ces plans sont confondus avec les plans de coordonnées.

242. Les grandeurs a, b, c sont appelées *demi-axes* de l'ellipsoïde. Si elles sont toutes différentes, l'ellipsoïde est dit ellipsoïde *à trois axes*. Considérons le cas où deux des grandeurs a, b, c sont égales. Soit, par exemple, $a = b$. L'équation (6) définit alors un cercle dont le centre est sur l'axe *Oz*. Il s'ensuit que lorsque $a = b$, on

peut considérer l'ellipsoïde comme une surface engendrée par une ellipse tournant autour d'un de ses axes. Si l'ellipsoïde résulte de la rotation de l'ellipse autour de son grand axe, il est appelé *ellipsoïde de révolution allongé*; un ellipsoïde résultant de la révolution autour du petit axe est appelé *ellipsoïde de révolution aplati*. Quand $a = b = c$ l'ellipsoïde est une sphère.

Remarque. Si dans l'équation (3) tous les coefficients A, B, C, L sont différents de zéro et ont le même signe, l'équation (3) ne définit aucune figure géométrique. Considérons l'équation:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Le premier membre de cette équation est le même que celui de l'équation canonique de l'ellipsoïde. Comme il est $\geqslant 0$ et comme le second membre est -1, l'équation étudiée ne définit aucune figure réelle. Cette équation est appelée du fait de son analogie avec l'équation (5) l'équation d'un *ellipsoïde imaginaire*.

243. Occupons-nous à présent des hyperboloïdes. Comme nous l'avons indiqué au n° 238, *on appelle hyperboloïde une surface du second degré définie, dans un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par l'équation*

$$Ax^2+By^2+Cz^2+L=0 \qquad (3)$$

à condition que tous les nombres A, B, C, L soient différents de zéro et qu'un des nombres A, B, C ait un signe contraire à celui des deux autres.

Pour un choix convenable des axes et une désignation convenable des coefficients, on peut faire en sorte que, dans l'équation (3), les deux premiers coefficients (A et B) aient le même signe. Considérant cette condition comme remplie, représentons l'équation (3) sous la forme

$$Ax^2+By^2+Cz^2=-L. \qquad (7)$$

Distinguons deux cas:

1) *Le nombre $-L$ est de même signe que A et B.*

Divisant alors tous les termes de l'équation par $-L$ et posant

$$a=+\sqrt{-\frac{L}{A}},\quad b=+\sqrt{-\frac{L}{B}},\quad c=+\sqrt{+\frac{L}{C}}$$

(toutes les expressions sous radical sont ici positives et les grandeurs a, b, c, sont donc réelles), nous aurons

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (8)$$

2) *Le nombre $-L$ a un signe contraire au signe de A et B.*

Cette fois nous diviserons tous les termes de l'équation (7) par $+L$ et nous poserons $a = +\sqrt{\frac{L}{A}}$, $b = +\sqrt{\frac{L}{B}}$, $c = +\sqrt{\frac{-L}{C}}$ (les expressions sous-radicales sont positives et les grandeurs a, b, c réelles). L'équation (7) aura alors la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{9}$$

L'hyperboloïde défini par l'équation (8) est appelé *hyperboloïde à une nappe*, l'hyperboloïde défini par l'équation (9) est dit *hyperboloïde à deux nappes*. Nous comprendrons par la suite l'origine de ces dénominations.

244. Etudions tout d'abord l'*hyperboloïde à une nappe*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Considérons les sections de cet hyperboloïde par les plans de coordonnées Oxz et Oyz. La section par le plan Oxz est définie par les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ y &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Nous voyons que c'est une hyperbole symétrique par rapport aux axes de coordonnées Ox, Oz et coupant l'axe Ox aux points $(a; 0; 0)$ et $(-a; 0; 0)$. La section par le plan Oyz est définie par les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ x &= 0. \end{aligned}\right\}$$

C'est une hyperbole symétrique par rapport aux axes Oy et Oz et coupant l'axe Oy aux points $(0; b; 0)$ et $(0; -b; 0)$.

Voyons maintenant l'intersection de l'hyperboloïde considéré avec des plans parallèles au plan Oxy. Chacun de ces plans est défini par une équation de forme $z = h$ et chaque section de l'hyperboloïde par un tel plan est définie par les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z &= h. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Nous voyons donc que 1) tout plan $z = h$ coupe l'hyperboloïde (8) suivant une ellipse dont les demi-axes sont

$$a^* = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad b^* = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}},$$

et qui est symétrique par rapport aux plans *Oxz* et *Oyz*; 2) les grandeurs a^* et b^* ont leur plus petite valeur pour $h = 0$ (nous avons alors $a^* = a$, $b^* = b$), autrement dit, la plus petite ellipse résulte de l'intersection de l'hyperboloïde par le plan $z = 0$ (qui est appelée ellipse *de gorge* de l'hyperboloïde à une nappe); 3) $|h|$ croissant indéfiniment, les grandeurs a^* et b^* croissent indéfiniment (fig. 113).

Résumant ce qui vient d'être dit, on peut conclure que l'hyperboloïde à une nappe a la forme d'un tube infini s'élargissant indéfiniment à partir de l'ellipse d'étranglement. L'hyperboloïde à une nappe possède trois plans de symétrie perpendiculaires entre eux. Dans le cas que nous avons choisi, ces plans se confondent avec les plans de coordonnées.

245. Les grandeurs a, b, c sont appelées *demi-axes* de l'hyperboloïde à une nappe. Les deux premières (a et b) sont représentées sur

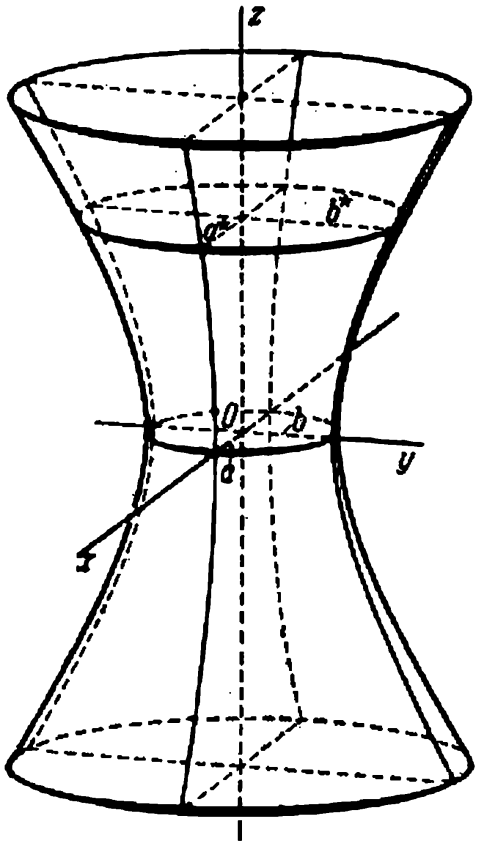


Fig. 113

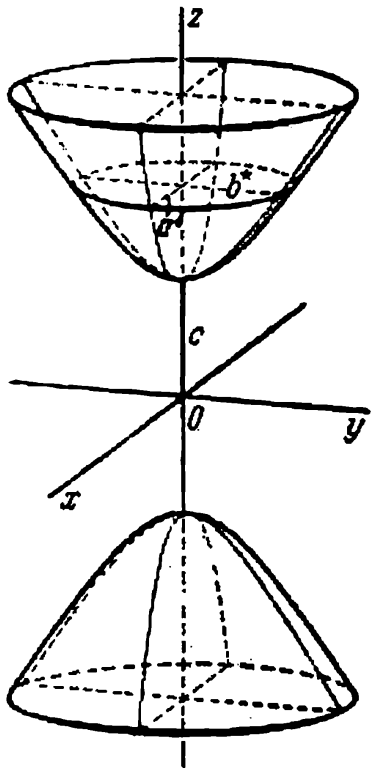


Fig. 114

la fig. 113. Pour représenter sur le graphique le demi-axe c, il faudrait construire le rectangle de base d'une des hyperboles définies par la section de l'hyperboloïde à une nappe par les plans *Oxz* et *Oyz*.

Remarquons que si $a = b$, les équations (10) définissent un cercle dont le centre est sur l'axe *Oz*. Il s'ensuit que pour $a = b$, on peut

considérer l'hyperboloïde à une nappe comme la surface engendrée par une hyperbole tournant autour de son axe non transverse.

246. Examinons à présent l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Examinons les sections de cette surface par les plans de coordonnées Oxz et Oyz. La section par le plan Oxz est définie par les équations

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}&=-1,\\ y&=0.\end{aligned}\right\}$$

Nous voyons que c'est une hyperbole symétrique par rapport aux axes de coordonnées Ox, Oz et coupant l'axe Oz aux points $(0;\ 0;\ c)$ et $(0;\ 0;\ -c)$. La section par le plan Oyz est définie par les équations

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=-1,\\ x&=0.\end{aligned}\right\}$$

C'est une hyperbole symétrique par rapport aux axes Oy, Oz et coupant l'axe Oz (aux points $(0;\ 0;\ c)$ et $(0;\ 0;\ -c)$).

Voyons à présent la section de cet hyperboloïde par des plans parallèles au plan de coordonnées Oxy. Chacun de ces plans est défini par une équation de forme $z = h$ et la section de l'hyperboloïde par ces plans par les équations

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=\frac{h^2}{c^2}-1,\\ z&=h.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Nous voyons donc que

1) si $|h|>c$, le plan $z=c$ coupe l'hyperboloïde à deux nappes suivant une ellipse dont les demi-axes sont

$$a^*=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},\quad b^*=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},$$

symétrique par rapport aux plans Oxz et Oyz;

2) $|h|$ croissant, les grandeurs a^* et b^* croissent;

3) si $|h|$ croît indéfiniment a^* et b^* croissent aussi indéfiniment;

4) si $|h|$ décroissant tend vers c, a^* et b^* décroissent également et tendent vers zéro; pour $h = \pm c$ nous aurons $a^* = 0$ et $b^* = 0$; cela signifie que l'ellipse, résultant de l'intersection du plan $z = c$ ou $z = -c$, dégénère et se réduit à un point, autrement dit les plans $z = \pm c$ sont tangents à l'hyperboloïde;

5) pour $|h| < c$, les équations (11) définissent une ellipse imaginaire, ce qui signifie que le plan $z = h$ pour $|h| < c$ n'a aucun point commun avec l'hyperboloïde (fig. 114).

Résumant ce que nous avons énoncé, nous pouvons conclure que l'hyperboloïde à deux nappes est une surface composée de deux nappes distinctes (d'où sa dénomination) dont chacune a la forme d'une coupe convexe infinie. L'hyperboloïde à deux nappes possède trois plans de symétrie perpendiculaires entre eux ; dans le cas que nous avons choisi, ces plans se confondent avec les plans de coordonnées.

247. Les grandeurs a, b, c sont appelées *demi-axes* de l'hyperboloïde à deux nappes. On ne voit sur la fig. 114 que la grandeur c. Pour représenter a et b, il faudrait construire les rectangles de base de l'hyperbole résultant de l'intersection de l'hyperboloïde à deux nappes avec les plans Oxz et Oyz.

Remarquons que pour $a = b$ les équations (11) définissent un cercle ayant son centre sur l'axe Oz. Il s'ensuit que pour $a = b$ on peut considérer l'hyperboloïde à deux nappes comme une surface engendrée par la rotation d'une hyperbole autour de son axe transverse.

§ 73. CÔNE DU DEUXIÈME ORDRE

248. Nous avons examiné au paragraphe précédent les équations du second degré de forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0$$

à condition que A, B, C, L sont différents de zéro. Supposons à présent que $L = 0$, c'est-à-dire que nous allons considérer l'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0 \qquad (1)$$

(en supposant comme précédemment que les nombres A, B, C ne sont pas nuls).

Deux cas sont possibles :

1) *les trois nombres A, B, C ont le même signe*, positif par exemple. L'équation (1) n'a alors qu'une solution $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, c'est-à-dire qu'il ne définit qu'un seul point ;

2) *les signes des nombres A, B, C sont différents.* Dans ce cas, comme nous allons le voir, l'équation (1) définit une surface dans le sens propre du terme.

249. Supposons, pour fixer le problème, que les nombres A et B soient positifs et le nombre C négatif. Introduisons de nouvelles désignations :

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad C = -\frac{1}{c^2};$$

l'équation (1) prend la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (2)$$

Ce qui particularise l'équation (2), c'est qu'elle est *homogène*, c'est-à-dire que tous ses termes sont de même puissance (=2), d'où découle la particularité géométrique suivante de la surface que cette équation définit.

Si un point quelconque M (autre que l'origine des coordonnées) appartient à cette surface, tous les points de la droite qui passe par ce point et l'origine des coordonnées appartiennent également à cette surface.

Démontrons cette affirmation. Soit M un point de coordonnées $(l; m; n)$, N un point quelconque appartenant à la droite OM. En vertu du n° 231, les coordonnées x, y, z du point N sont définies par les égalités

$$x=lt, \quad y=mt, \quad z=nt,$$

où t est un certain nombre. Supposons que le point M appartient à la surface donnée. Alors

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}=0.$$

Mais dans ce cas

$$\frac{(lt)^2}{a^2}+\frac{(mt)^2}{b^2}-\frac{(nt)^2}{c^2}=t^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}\right)=0,$$

et, par conséquent, le point N appartient également à cette surface, ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons que toute surface définie dans un système de coordonnées cartésiennes orthogonales par une équation homogène possède cette propriété (car nous ne nous sommes appuyés, lors de notre démonstration, que sur l'homogénéité de l'équation considérée). Autrement dit, toute surface définie par une équation h o m o g è n e est engendrée par un système de droites concourantes en un point, à savoir, à l'origine des coordonnées. Une telle surface est dite *surface conique* ou plus simplement *cône*. Les droites qui constituent le cône sont appelées *génératrices* et le point vers lequel elles convergent est appelé *sommet* du cône.

En particulier, *on appelle cône du deuxième ordre toute surface définie, dans un système de coordonnées cartésiennes, par une équation de forme* (2).

Pour comprendre la forme du cône du deuxième ordre, il suffit de considérer sa section par un plan quelconque ne passant pas par l'origine des coordonnées (autrement dit, ne passant pas par son

sommet). Prenons, par exemple, le plan $z = c$. La section du cône par ce plan est définie par les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1, \\ z &= c. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Il est évident qu'il s'agit d'une ellipse dont les demi-axes sont a et b, symétrique par rapport aux plans de coordonnées Oxz et Oyz.

C'est ce que nous voyons sur la fig. 115 où est représenté un cône du deuxième ordre.

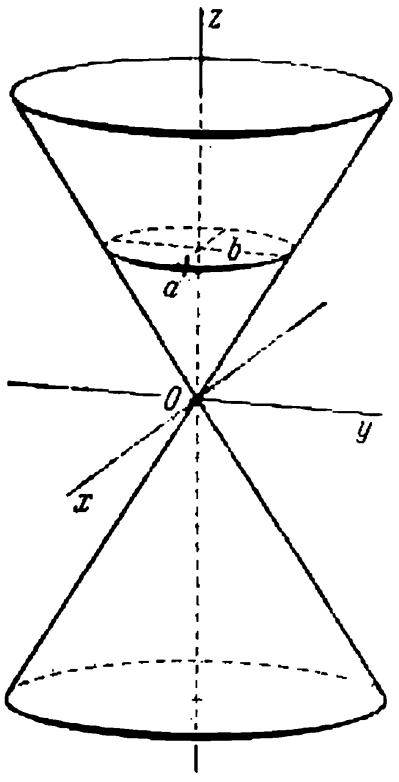


Fig. 115

Remarquons que si $a = b$, l'ellipse définie par les équations (3) est un cercle dont le centre se trouve sur l'axe Oz et que, par conséquent, le cône sera alors un *cône de révolution*.

250. Considérons l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Cette équation détermine un seul point réel : $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Cependant du fait de son analogie avec l'équation (2) elle est souvent appelée l'équation d'un *cône imaginaire*.

§ 74. PARABOLOÏDES

251. Voyons à présent un autre cas particulier de l'équation générale du second degré :

$$Ax^2 + By^2 + 2Kz = 0. \qquad (1)$$

Supposons que tous les nombres A, B, K soient ici non nuls. Supposons de plus que les nombres A et K soient de signes différents (ce qui peut toujours être obtenu par rotation du système de coordonnées autour de l'axe Ox de 180°, c'est-à-dire en remplaçant y par $-y$ et z par $-z$).

Ecrivons cette équation sous la forme

$$2z = \frac{x^2}{-\frac{K}{A}} + \frac{y^2}{-\frac{K}{B}}.$$

Etant donné que K et A sont de signes contraires, $-\frac{K}{A}$ est un nombre positif. Désignons-le par p. Quant au nombre $-\frac{K}{B}$, il peut

être positif ou négatif. Désignons-le par $\pm q$, où q est un nombre positif. Par conséquent, l'équation peut prendre une des formes suivantes:

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$$

ou

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q},$$

où p et q sont des nombres p o s i t i f s.

Examinons chacune de ces équations.

252. *La surface définie, dans un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par une équation de forme*

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \tag{2}$$

(*p et q étant positifs*) *est appelée paraboloïde elliptique.* L'équation (2) est l'équation canonique d'un paraboloïde elliptique.

Etudions cette surface par la méthode des sections. Examinons tout d'abord les sections par les plans de coordonnées *Oxz* et *Oyz*. Pour $y = 0$, nous avons à partir de l'équation (2): $x^2 = 2pz$; par conséquent, la section par le plan *Oxz* est définie par les équations

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= 2pz, \\ y &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Nous voyons que c'est une parabole ascendante, symétrique par rapport à l'axe *Oz* et dont le sommet est à l'origine des coordonnées; le paramètre de cette parabole est égal à p. La section par le plan *Oyz* est définie par les équations

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 2qz, \\ x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

et représente une parabole disposée de la même manière que précédemment dont le paramètre est q.

Examinons à présent les sections du paraboloïde par des plans parallèles au plan de coordonnées *Oxy*. Chacun de ces plans est défini par l'équation $z = h$ et la section du paraboloïde par ces plans est définie par l'équation

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} &= 2h, \\ z &= h. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Cela nous indique que 1) pour $h > 0$, le plan $z = h$ coupe le paraboloïde elliptique suivant une ellipse dont les demi-axes sont $a^* = \sqrt{2hp}$ et $b^* = \sqrt{2hq}$, disposée symétriquement par rapport

aux plans Oxz et Oyz; 2) lorsque h croît, les grandeurs a^* et b^* croissent; 3) si h croît indéfiniment, a^* et b^* croissent aussi indéfiniment; 4) si h, décroissant, tend vers 0, a^* et b^* décroissent et tendent également vers 0; pour $h = 0$ nous avons $a^* = 0$, $b^* = 0$, ce qui signifie que l'ellipse, résultant de la section du paraboloïde

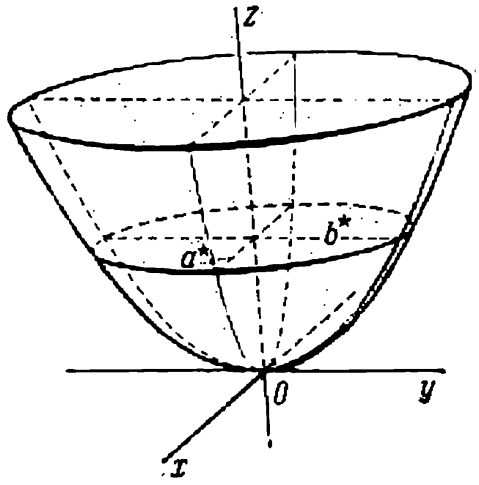


Fig. 116

par le plan $z = 0$, dégénère en un point; c'est-à-dire que le plan $z = 0$ est tangent au paraboloïde elliptique considéré; 5) pour $h < 0$ les équations (3) définissent une ellipse imaginaire; cela signifie que le plan $z = h$, pour $h < 0$, n'a pas de points communs avec le paraboloïde considéré (fig. 116).

Résumant ce qui vient d'être obtenu, nous pouvons conclure que le paraboloïde elliptique a la forme d'une coupe convexe qui s'élargit indéfiniment. Il possède deux plans de symétrie perpendiculaires l'un à l'autre qui coïncident, dans le système de coordonnées choisi, avec les plans de coordonnées Oxz et Oyz. Le point qui coïncide avec l'origine des coordonnées est appelé *sommet* du paraboloïde elliptique, les nombres p et q sont ses *paramètres*.

Remarquons que si $p = q$ les équations (3) définissent un cercle dont le centre est situé sur l'axe Oz. Il s'ensuit que, pour $p = q$, le paraboloïde elliptique peut être considéré comme une surface engendrée par la rotation d'une parabole autour de son axe. C'est alors un *paraboloïde de révolution*.

253. *On appelle paraboloïde hyperbolique la surface définie, dans un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par une équation de forme*

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \qquad (4)$$

(*p et q étant positifs*).

Considérons la section d'un paraboloïde hyperbolique par le plan Oxz. Pour $y = 0$ l'équation (4) nous donne $x^2 = 2pz$; par conséquent, la section du paraboloïde hyperbolique par le plan Oxz est définie par les équations

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= 2pz, \\ y &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Nous voyons que c'est une parabole ascendante, symétrique par rapport à l'axe Oz dont le sommet coïncide avec l'origine des coordonnées; le paramètre de cette parabole est égal à p.

Considérons à présent la section du paraboloïde par des plans parallèles au plan Oyz. Chacun de ces plans est défini par l'équation $x = h$ et la section du paraboloïde par ces plans par les équations

$$\left.\begin{aligned} 2z &= -\frac{y^2}{q} + \frac{h^2}{p}, \\ x &= h. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

D'où nous voyons que, quelle que soit la valeur de h, le plan $x = h$ coupe le paraboloïde hyperbolique suivant une parabole descendante, symétrique par rapport au plan Oxz (voir n° 136). Toutes ces paraboles, comme l'indique la première des équations (6), ont un paramètre commun q; le sommet de chacune d'elles se trouve sur la courbe d'intersection du paraboloïde et du plan Oxz, c'est-à-dire sur la parabole ascendante définie par les équations (5) (fig. 117).

Remarquons que chaque plan $y = h$ coupe le paraboloïde hyperbolique suivant une parabole comme l'indiquent les équations

$$\left.\begin{aligned} 2z &= \frac{x^2}{p} - \frac{h^2}{q}, \\ y &= h, \end{aligned}\right\}$$

définissant ces sections; une de ces sections, celle qui correspond à $h = 0$, a été examinée par nous en premier lieu.

La fig. 117 représente une portion de paraboloïde hyperbolique. Le bord de cette portion est constitué par deux segments de paraboles ascendantes dont les plans sont parallèles au plan Oxz et de deux segments de paraboles descendantes dont les plans sont parallèles au plan Oyz.

Considérons enfin les sections du paraboloïde hyperbolique par des plans parallèles au plan Oxy. L'équation de chacun de ces plans est $z = h$ et la section du paraboloïde par ces plans est définie par les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} &= 2h, \\ z &= h. \end{aligned}\right\}$$

D'où nous voyons que les plans $z = h$ coupent le paraboloïde hyperbolique suivant des hyperboles symétriques par rapport aux plans Oxz et Oyz. Si $h > 0$, l'hyperbole correspondante coupe le plan Oxz; si $h < 0$ l'hyperbole coupe le plan Oyz; pour $h = 0$,

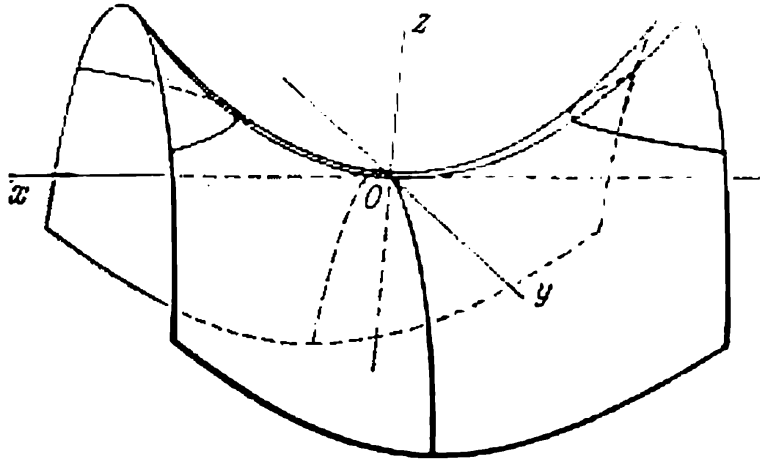


Fig. 117

l'hyperbole dégénère en une paire de droites (la fig. 117 représente une section du paraboloïde par le plan $z = h$ pour le cas où $h > 0$).

Tout ce que nous venons d'exposer nous permet de conclure que le paraboloïde hyperbolique a la forme d'une selle. Il possède deux plans de symétrie perpendiculaires; dans le système de coordonnées choisi ces plans coïncident avec les plans de coordonnées Oxz et Oyz. Le point qui coïncide avec l'origine des coordonnées est appelé *sommet* du paraboloïde hyperbolique, les nombres p et q sont ses *paramètres*.

§ 75. CYLINDRES DU DEUXIÈME ORDRE

254. Pour terminer notre revue des cas particuliers de l'équation (2) n° 239 examinons encore le cas où ses coefficients C, E, F et K sont nuls. L'équation prend alors la forme

$$Ax^2 + By^2 + 2Dxy + 2Gx + 2Hy + L = 0 \qquad (1)$$

et ne contient pas la variable z. En vertu du n° 207, l'équation (1) définit une surface cylindrique (ou plus simplement un cylindre) dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz. Etant donné que l'équation (1) est une équation du second degré, la surface qu'elle définit est dite *cylindre du deuxième ordre*.

Remarquons à présent que l'équation (1) ne diffère pas, en fait, de l'équation (1) § 41, qui définit, dans un système de coordonnées cartésiennes planes, une ligne du second degré. Nous pouvons donc

conclure que la section du cylindre par le plan Oxy est une courbe du second degré. Suivant le caractère de cette ligne nous aurons des cylindres du deuxième ordre de types suivants:

a) *cylindre elliptique* (fig. 118). Un choix approprié du système de coordonnées permet de ramener son équation à la forme suivante

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

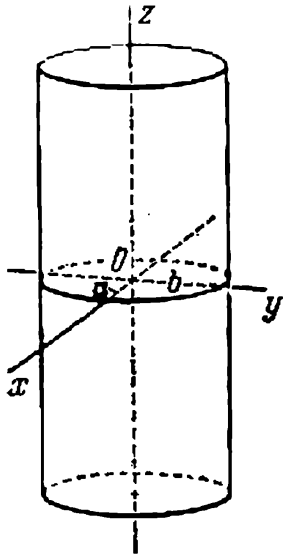


Fig. 118

Si $a = b$ nous aurons un cylindre circulaire ou cylindre de révolution;

b) *cylindre hyperbolique* (fig. 119); son équation peut être ramenée à la forme

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

c) *cylindre parabolique* (fig. 120); son équation peut être ramenée à la forme

$$y^2=2px.$$

Le cas où le premier membre de l'équation (1) est un produit de deux facteurs du premier degré est également possible. Le cylindre «dégénère» alors en deux plans.

Il est enfin possible que l'équation (1) n'ait pas de solution réelle (par exemple, $x^2 + y^2 = -1$) et donc que l'équation (1) ne défi-

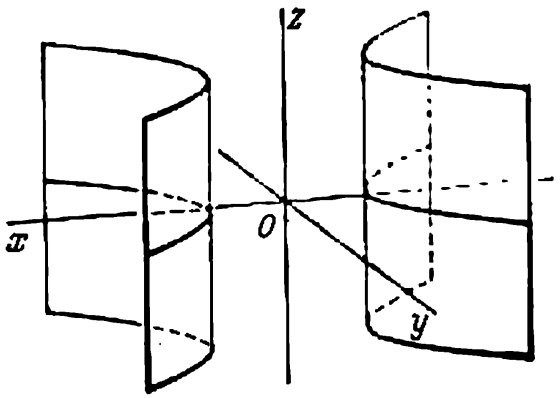


Fig. 119

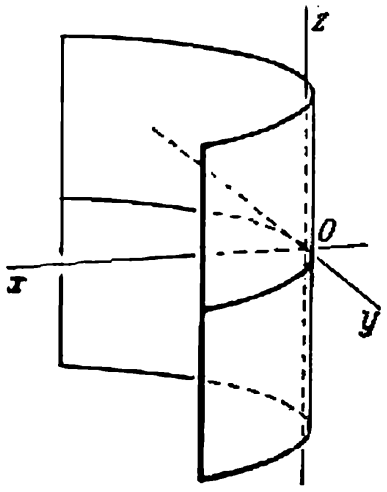


Fig. 120

nisse aucune figure géométrique réelle. On dit habituellement qu'une telle équation définit un cylindre imaginaire.

§ 76. GÉNÉRATRICES RECTILIGNES DE L'HYPERBOLOÏDE À UNE NAPPE. CONSTRUCTIONS DE V. CHOUKHOV

255. L'examen des divers types de surfaces du second degré (voir §§ 72-75) permet de déceler d'emblée qu'il existe parmi elles des surfaces *réglées*, c'est-à-dire des surfaces engendrées par des droites : cônes, cylindres. Mais il se trouve qu'en plus des cylindres et des cônes, l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique sont aussi des surfaces réglées. Ce fait n'est pas évident « de visu », mais il est facile de le démontrer algébriquement. Faisons cette démonstration pour l'hyperboloïde à une nappe.

Mettons l'équation canonique de l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2},$$

soit

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right). \tag{1}$$

Considérons à présent les deux équations du premier degré

$$\left.\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

où α et β sont deux nombres non nuls simultanément. Si α et β sont fixés, le système d'équations (2) définit une droite ; faisant varier α et β, nous aurons un système infini de droites. Remarquons à présent qu'en multipliant membre à membre les équations (2) nous obtenons l'équation (1). Il s'ensuit que chacune de ces droites appartient à l'hyperboloïde à une nappe. En effet, si les coordonnées x, y, z d'un point quelconque satisfont aux deux équations (2) elles satisfont également à l'équation (1) ; par conséquent, chaque point d'une droite définie par les équations (2), pour α et β quelconques (non nuls simultanément), appartient à l'hyperboloïde à une nappe, ce qui signifie que toute la droite lui appartient.

Montrons enfin que par chaque point de l'hyperboloïde à une nappe passe une et seulement une droite du système donné.

Soit $M_0\,(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ un point quelconque de l'hyperboloïde à une nappe ; étant donné que ses coordonnées satisfont à l'équation

de l'hyperboloïde, on a

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right). \tag{3}$$

Trouvons α et β de manière que la droite du système (2) qui leur correspond passe par le point M_0. Etant donné que les coordonnées du point M_0 doivent satisfaire aux équations de cette droite, nous aurons pour définir les nombres α et β deux équations

$$\left.\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)&=\beta\left(1+\frac{y_0}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x_0}{b}-\frac{z_0}{c}\right)&=\alpha\left(1-\frac{y_0}{b}\right).\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Si $1+\frac{y_0}{b}\neq 0$, nous trouvons de la première équation de ce système $\beta=k\alpha$, où

$$k=\frac{\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}}{1+\frac{y_0}{b}}. \tag{5}$$

$\beta=k\alpha$ satisfait également à la deuxième équation du système (4), ce qui découle des relations (3) et (5). Remplaçons β par $k\alpha$ dans l'équation (2), α étant quelconque, mais non nul. Etant donné que les deux équations ont à présent un facteur commun α, nous pouvons le simplifier. Nous obtiendrons un système d'équations bien déterminé

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=k\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ k\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=1-\frac{y}{b}\end{aligned}\right\}$$

auquel correspond une droite bien déterminée. Cette droite passe par le point M_0 (car les nombres α et β ont été choisis de façon à vérifier les équations (4)).

Si, par contre, $1+\frac{y_0}{b}=0$, la formule (5) perd son sens, mais si $1+\frac{y_0}{b}=0$, $1-\frac{y_0}{b}$ sera forcément différent de zéro. On peut trouver dans ce cas la solution du système (4) en se basant sur la deuxième équation, après quoi on peut démontrer, comme précédemment, que dans ce cas également une seule droite du système (2) passera par le point M_0.

Ainsi donc, pour différentes valeurs de α et β les équations (2) définissent un système infini de droites appartenant à la suface de

l'hyperboloïde à une nappe et couvrant toute cette surface. Ces droites sont appelées *génératrices rectilignes* de l'hyperboloïde à une nappe.

Nous avons montré que l'hyperboloïde à une nappe est composé de droites, c'est-à-dire que c'est une surface réglée. De plus, l'hyperboloïde à une nappe est doublement une surface réglée. Cela signifie qu'il possède deux systèmes de génératrices rectilignes.

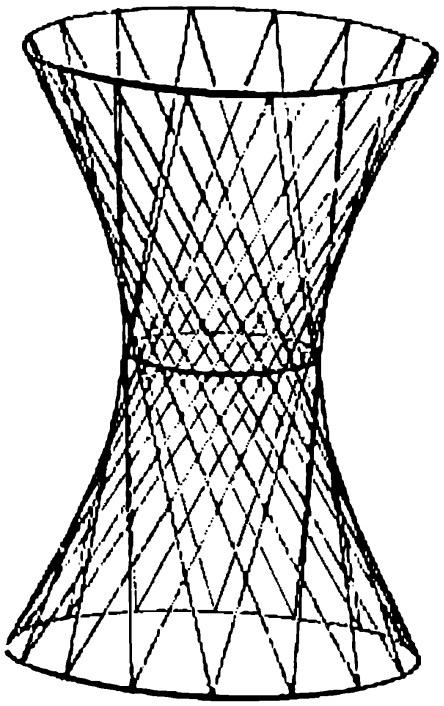


Fig. 121

On peut, en effet, par analogie avec le système (2) former les équations

$$\left.\begin{aligned} \alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Les équations (6) définissent également un système de génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe, d'ailleurs différent de celui défini par le système (2).

L'hyperboloïde à une nappe avec ses deux systèmes de génératrices rectilignes est représenté fig. 121.

256. Sans entrer dans les détails de la question, indiquons que le paraboloïde hyperbolique

$$2z=\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}$$

possède également deux systèmes de génératrices rectilignes, dont l'un est défini par les équations

$$\left.\begin{aligned} \alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)&=2\beta z,\\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)&=\alpha, \end{aligned}\right\}$$

et l'autre par les équations

$$\left.\begin{aligned} \alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)&=2\beta z,\\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)&=\alpha. \end{aligned}\right\}$$

Le paraboloïde hyperbolique avec ses deux systèmes de génératrices rectilignes est représenté fig. 122.

257. C'est au célèbre ingénieur russe Vladimir Choukhov, membre honoraire de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., qu'appartient l'idée d'utiliser le caractère de surface réglée de l'hyperboloïde

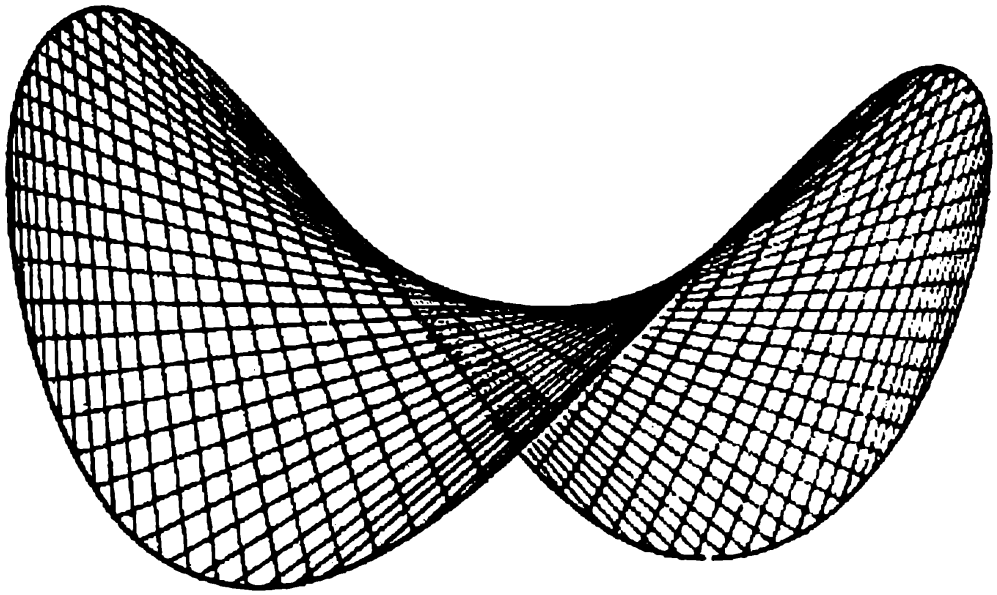


Fig. 122

à une nappe dans la technique de la construction. V. Choukhov a proposé de construire des fermes métalliques constituées de poutrelles disposées suivant les génératrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe (de révolution). Ces constructions se sont avérées résistantes et légères. Elles sont souvent utilisées pour l'édification de châteaux d'eau et de mâts pour la radio et la télévision.

§ 77. ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ. FORMULES DE TRANSFORMATION DES COORDONNÉES CARTÉSIENNES ORTHOGONALES DANS L'ESPACE

258. Nous avons examiné dans les paragraphes précédents une série de cas particuliers de l'équation générale du second degré à trois variables et nous avons étudié les surfaces qu'ils représentaient. Nous n'avons pas choisi arbitrairement les cas particuliers de cette équation. C'est qu'une transformation judicieuse du système de coordonnées (en passant d'un système de coordonnées cartésiennes orthogonales) permet de donner à l'équation générale du second degré à trois inconnues soit la forme (3), § 72, soit la forme (1), § 73, soit enfin la forme (1), § 74. Nous avons donc, dans les paragraphes précédents, passé en revue toutes les formes possibles de surface du second degré.

Nous allons expliquer succinctement comment se réalise le passage de l'équation générale du second degré aux cas particuliers que nous avons examinés dans les §§ 79, 80 et 81.

259. Nous allons définir, tout d'abord, les formules de translation des coordonnées cartésiennes orthogonales, c'est-à-dire d'une transformation du système de coordonnées cartésiennes qui permet de déplacer l'origine des coordonnées, l'orientation des axes et leur direction, ainsi que l'unité de mesure restant inchangées.

Soient Ox, Oy et Oz les anciens axes et $O'x'$, $O'y'$ et $O'z'$ les nouveaux axes de coordonnées. La position des nouveaux axes par rapport à l'ancien système est définie lorsque sont données les anciennes coordonnées de la nouvelle origine : O' $(a; b; c)$. Un point M quelconque de l'espace a des coordonnées $(x; y; z)$ par rapport à l'ancien système ; les coordonnées de ce même point dans le nouveau système seront $(x'; y'; z')$. Le but que nous poursuivons est d'établir les formules exprimant les anciennes coordonnées à l'aide de nouvelles ou inversement. Nous utiliserons pour cela l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \tag{1}$$

$\overrightarrow{OM}$ est le rayon vecteur du point M dans l'ancien système et, par conséquent, les projections de ce vecteur sur les axes Ox, Oy et Oz sont égales aux anciennes coordonnées du point M (voir n° 152) : $\overrightarrow{OM} = \{x; y; z\}$. De même, $\overrightarrow{OO'} = \{a; b; c\}$. Le vecteur $\overrightarrow{O'M}$ est le rayon vecteur du point M dans le nouveau système de coordonnées ; ses projections sur les axes $O'x$, $O'y$ et $O'z$, ou ce qui revient au même sur les axes Ox, Oy et Oz sont égales aux nouvelles coordonnées du point M, c'est-à-dire $\overrightarrow{O'M} = \{x'; y'; z'\}$.

Nous pouvons donc écrire l'égalité (1) comme suit

$$\{x; y; z\} = \{x'; y'; z'\} + \{a; b; c\}.$$

D'où

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c. \tag{2}$$

Ce sont précisément les formules que nous voulions trouver.

260. Nous allons établir, à présent, les formules de transformation de coordonnées cartésiennes orthogonales dans le cas d'une transformation du système de coordonnées pour laquelle les axes se transforment (tout en restant perpendiculaires entre eux), l'origine des coordonnées et l'unité de mesure restant inchangées.

Soient Ox, Oy et Oz les anciennes coordonnées et Ox', Oy' et Oz' les nouveaux axes de coordonnées. Considérons comme connus les angles que forme chacun des axes du nouveau système avec les axes de l'ancien système. Nous désignerons les angles considérés dans le tableau suivant :

	Ox	Oy	Oz
Ox'	α_1	β_1	γ_1
Oy'	α_2	β_2	γ_2
Oz'	α_3	β_3	γ_3

(3)

Un point M quelconque de l'espace possède par rapport aux anciens axes les coordonnées $(x; y; z)$; les coordonnées de ce même point par rapport au nouveau système sont $(x'; y'; z')$. Notre but est d'établir les formules permettant d'exprimer les anciennes coordonnées x, y, z à l'aide de nouvelles x', y', z' (ou x', y', z' à l'aide de x, y, z).

Désignons par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs de base des anciens axes de coordonnées et par $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ les vecteurs de base des nouveaux axes (voir n° 171).

Décomposons chacun des vecteurs $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ par rapport à la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Etant donné que les vecteurs $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ sont des vecteurs unitaires, en vertu des nos 173 et 155, et en prenant en considération le tableau (3), nous avons

$$\left.\begin{aligned} \vec{i}' &= \cos\alpha_1 \cdot \vec{i} + \cos\beta_1 \cdot \vec{j} + \cos\gamma_1 \cdot \vec{k}, \\ \vec{j}' &= \cos\alpha_2 \cdot \vec{i} + \cos\beta_2 \cdot \vec{j} + \cos\gamma_2 \cdot \vec{k}, \\ \vec{k}' &= \cos\alpha_3 \cdot \vec{i} + \cos\beta_3 \cdot \vec{j} + \cos\gamma_3 \cdot \vec{k}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Considérons le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Décomposons-le d'abord par rapport à la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, puis par rapport à la base $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{5}$$

$$\overrightarrow{OM} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \tag{6}$$

(les coefficients sont, dans le premier cas, les anciennes coordonnées du point M, dans le deuxième cas, ses nouvelles coordonnées). En vertu des égalités (5) et (6)

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'.$$

Remplaçant les vecteurs $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ donnés par (4), nous avons

$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x' &(\cos\alpha_1 \cdot \vec{i} + \cos\beta_1 \cdot \vec{j} + \cos\gamma_1 \cdot \vec{k}) + \\ + y' &(\cos\alpha_2 \cdot \vec{i} + \cos\beta_2 \cdot \vec{j} + \cos\gamma_2 \cdot \vec{k}) + \\ + z' &(\cos\alpha_3 \cdot \vec{i} + \cos\beta_3 \cdot \vec{j} + \cos\gamma_3 \cdot \vec{k}), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = &(x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3)\,\vec{i} + \\ &+ (x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3)\,\vec{j} + \\ &+ (x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3)\,\vec{k}. \end{aligned} \tag{7}$$

Etant donné que les coefficients de la décomposition du vecteur par rapport à la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont déterminés par ce vecteur de façon univoque (voir théorème 19, n° 173), les trois égalités suivantes découlent de (7):

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3, \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3, \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ce sont précisément les formules que nous cherchons, c'est-à-dire les formules qui expriment les anciennes coordonnées (x, y, z) d'un point quelconque M à l'aide de ses nouvelles coordonnées lorsque les axes changent, l'origine des coordonnées restant immobile.

Etant donné que les deux systèmes de coordonnées sont applicables à parts égales, il n'est point nécessaire de déduire de nouveau les formules qui expriment les nouvelles coordonnées x', y', z' à l'aide des anciennes x, y, z. Il suffit d'intervertir dans les formules (8) les anciennes coordonnées et les nouvelles et de modifier, en conséquence, les places des symboles désignant les angles dans l'ancien et le nouveau système de coordonnées.

261. Nous allons établir enfin la formule de transformation générale des coordonnées cartésiennes orthogonales, c'est-à-dire les formules de transformation des coordonnées pour le cas où les axes et l'origine changent simultanément, les axes restant perpendiculaires et l'unité de mesure restant inchangée.

Nous considérons comme connues les anciennes coordonnées de la nouvelle origine O' (a, b, c) et les angles que forme chaque nouvel axe avec chaque ancien axe. Désignons ces angles comme nous l'avons fait dans le tableau (3) du n° 260.

Désignons par x, y, z les anciennes coordonnées d'un point quelconque M et par x', y', z' les nouvelles coordonnées de ce même point. Notre but est d'établir les formules permettant d'exprimer les anciennes coordonnées à l'aide de nouvelles (ou les nouvelles à l'aide des anciennes).

Pour résoudre ce problème, introduisons un système auxiliaire de coordonnées dont les axes auront la même direction que l'ancien système et dont l'origine coïncidera avec l'origine du nouveau système. Désignons les coordonnées du point M par rapport à ce nouveau système auxiliaire par x'', y'', z''.

Etant donné que les axes du nouveau système auxiliaire sont obtenus par translation parallèle des axes de l'ancien système, il vient

$$x = x'' + a, \quad y = y'' + b, \quad z = z'' + c.$$

Etant donné ensuite que le nouveau système a la même origine que le système auxiliaire, nous aurons en vertu du n° 260

$$\begin{aligned} x'' &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3, \\ y'' &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3, \\ z'' &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3. \end{aligned}$$

En substituant ces expressions de x'', y'', z'' dans les deuxièmes membres des égalités précédentes nous aurons

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 + a, \\ y &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3 + b, \\ z &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3 + c. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Ces dernières formules sont celles que nous cherchons.

§ 78. QUELQUES CONCLUSIONS D'ORDRE GÉNÉRAL DÉCOULANT DES FORMULES DE TRANSFORMATION DES COORDONNÉES

262. Les formules de transformation des coordonnées cartésiennes orthogonales dans l'espace étant établies, il est facile de démontrer le théorème suivant.

Si une surface est définie par une équation algébrique de degré n dans un système quelconque de coordonnées cartésiennes orthogonales, elle sera également définie dans tout autre système de coordonnées cartésiennes orthogonales par une équation algébrique du même degré n.

La démonstration est absolument analogue à celle du théorème (8), n° 49.

263. Il découle directement du théorème précédent que *la courbe d'intersection d'une surface du second degré avec un plan est une ligne dont l'ordre n'est pas supérieur à deux.*

Démonstration. Soient une surface quelconque du second degré et un plan α. Choisissons un système de coordonnées cartésiennes orthogonales de façon que ses axes Ox et Oy appartiennent au plan α. En vertu du n° 262, cette surface sera définie dans le système de coordonnées choisi, comme dans tout système cartésien orthogonal, par une certaine équation du second degré

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0. \quad (1)$$

L'équation du plan α par rapport à ce système de coordonnées choisi sera $z = 0$.

La ligne d'intersection de la surface donnée avec le plan α est définie par le système formé des équations (1) et de l'équation $z = 0$. En faisant dans l'équation (1) $z = 0$, nous aurons

$$Ax^2+By^2+2Dxy+2Gx+2Hy+L=0. \quad (2)$$

Nous avons obtenu l'équation de la courbe d'intersection de la surface donnée avec le plan dans le système de coordonnées défini, sur le plan α, par les axes Ox et Oy. Or l'équation (2) est une équation algébrique dont le degré n'est pas supérieur à 2. Le théorème est donc démontré.

Remarque. Le degré de l'équation (2) peut être inférieur à 2, c'est ce qui se produira si A, B et D s'annulent. Par exemple, le cylindre parabolique coupe son plan de symétrie suivant une droite, c'est-à-dire suivant une courbe du premier degré. Mais ces cas sont des exceptions. En général, les surfaces du second degré coupent les plans suivant une ligne du second degré (nous avons de nombreux et différents exemples d'intersection des plans avec des surfaces du second degré aux paragraphes 72 à 74).

264. Le n° 249 indique que le cône de révolution est une surface du second degré. Il découle, ainsi, de ce qui vient d'être énoncé que tout plan ne passant pas par le sommet du cône de révolution coupe ce cône suivant une courbe non dégénérée du second degré, c'est-à-dire suivant soit une ellipse, soit une hyperbole, soit une parabole. Ceci prouve la justesse du théorème 14 que nous avions omis de démontrer en ses temps et lieux (voir n° 112).

§ 79. SIMPLIFICATION DE L'ÉQUATION D'UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ AU MOYEN DU TRANSFERT DU CENTRE À L'ORIGINE DES COORDONNÉES

265. Soit une surface du second degré

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+ \\ +2Gx+2Hy+2Kz+L=0. \quad (1)$$

Voyons tout d'abord comment se transforme l'équation (1) lors d'une translation parallèle des axes. Supposons que la translation parallèle des axes s'effectue de façon que l'origine des coordonnées coïncide avec un certain point S_0 $(x_0 ; y_0 ; z_0)$. Désignons par x, y, z les anciennes coordonnées d'un point quelconque de l'espace, par $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ les nouvelles coordonnées de ce même point. Nous aurons

$$x=\tilde{x}+x_0, \quad y=\tilde{y}+y_0, \quad z=\tilde{z}+z_0. \quad (2)$$

En remplaçant dans le premier membre de l'équation (1) les anciennes coordonnées par les nouvelles et en regroupant ensuite les termes, nous aurons:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Kz+L=$$
$$=A(\tilde{x}+x_0)^2+B(\tilde{y}+y_0)^2+C(\tilde{z}+z_0)^2+2D(\tilde{x}+x_0)(\tilde{y}+y_0)+$$
$$+2E(\tilde{x}+x_0)(\tilde{z}+z_0)+2F(\tilde{y}+y_0)(\tilde{z}+z_0)+2G(\tilde{x}+x_0)+$$
$$+2H(\tilde{y}+y_0)+2K(\tilde{z}+z_0)+L=A\tilde{x}^2+B\tilde{y}^2+C\tilde{z}^2+2D\tilde{x}\tilde{y}+2E\tilde{x}\tilde{z}+$$
$$+2F\tilde{y}\tilde{z}+2(Ax_0+Dy_0+Ez_0+G)\tilde{x}+2(Dx_0+By_0+Fz_0+H)\tilde{y}+$$
$$+2(Ex_0+Fy_0+Cz_0+K)\tilde{z}+(Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2+2Dx_0y_0+2Ex_0z_0+$$
$$+2Fy_0z_0+2Gx_0+2Hy_0+2Kz_0+L).$$

Nous voyons que dans les nouvelles coordonnées *les coefficients des termes de puissance élevée* (c'est-à-dire du second degré) *restent les mêmes*. Par contre, les coefficients de $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ et le terme constant changent. Introduisons les désignations suivantes:

$$\tilde{G}=Ax_0+Dy_0+Ez_0+G, \tag{3}$$
$$\tilde{H}=Dx_0+By_0+Fz_0+H, \tag{4}$$
$$\tilde{K}=Ex_0+Fy_0+Cz_0+K, \tag{5}$$
$$\tilde{L}=Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2+2Dx_0y_0+2Ex_0z_0+$$
$$+2Fy_0z_0+2Gx_0+2Hy_0+2Kz_0+L. \tag{6}$$

L'équation de la surface donnée prendra alors la forme suivante:

$$A\tilde{x}^2+B\tilde{y}^2+C\tilde{z}^2+2D\tilde{x}\tilde{y}+2E\tilde{x}\tilde{z}+2F\tilde{y}\tilde{z}+$$
$$+2\tilde{G}\tilde{x}+2\tilde{H}\tilde{y}+2\tilde{K}\tilde{z}+\tilde{L}=0. \tag{7}$$

266. Essayons de choisir le point S de façon que dans l'équation transformée les termes en $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ et $\tilde{z}$ s'annulent, c'est-à-dire que $\tilde{G}=0$, $\tilde{H}=0$, $\tilde{K}=0$. Les anciennes coordonnées de ce point doivent satisfaire aux trois équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} Ax_0+Dy_0+Ez_0+G&=0,\\ Dx_0+By_0+Fz_0+H&=0,\\ Ex_0+Fy_0+Cz_0+K&=0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Nous trouverons le point S cherché si le système (8) est compatible, c'est-à-dire si ce système a une solution. Lorsque nous aurons transporté l'origine des coordonnées en ce point, l'équation de notre

surface prendra la forme suivante:

$$A\tilde{x}^2 + B\tilde{y}^2 + C\tilde{z}^2 + 2D\tilde{x}\tilde{y} + 2E\tilde{x}\tilde{z} + 2F\tilde{y}\tilde{z} + \tilde{L} = 0. \qquad (9)$$

267. Remarquons à présent que de l'égalité (9) découle l'égalité

$$A(-\tilde{x})^2 + B(-\tilde{y})^2 + C(-\tilde{z})^2 + 2D(-\tilde{x})(-\tilde{y}) + 2E(-\tilde{x})(-\tilde{z}) + \\ + 2F(-\tilde{y})(-\tilde{z}) + \tilde{L} = 0.$$

Donc, si un certain point $M(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ appartient à une certaine surface, le point $N(-\tilde{x}, -\tilde{y}, -\tilde{z})$ appartient également à cette surface. Nous voyons que les points de la surface donnée se répartissent par couples symétriques par rapport à la nouvelle origine des coordonnées, c'est-à-dire par rapport au point S.

S'il existe dans l'espace un point par rapport auquel les points d'une surface donnée sont répartis par couples symétriques, ce point s'appelle centre de la surface donnée.

Par conséquent, *le sens géométrique de la transformation des coordonnées par suite de laquelle l'équation d'une surface du second degré est ramenée à la forme* (9) *consiste en ce que l'origine des coordonnées est transportée au centre de cette surface.*

268. Conformément à ce qui vient d'être énoncé, toute solution (x_0, y_0, z_0) du système (8) définit le centre de la surface donnée (dans le système primitif de coordonnées). C'est pourquoi on appelle l'équation (8) *équation du centre.*

La réciproque est également vraie: si un certain point est le centre d'une surface du second degré les coordonnées x_0, y_0, z_0 de ce point constituent la solution du système (8). Nous ne nous attarderons pas sur la démonstration de cette réciproque.

269. Désignons par δ le déterminant du système (8)

$$\delta = \begin{vmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{vmatrix}.$$

La grandeur δ est composée des coefficients de l'ensemble des termes du premier et du deuxième degré de l'équation (1) et est appelée *discriminant* de cette équation.

Si $\delta \neq 0$ le système (8) est compatible et déterminé, c'est-à-dire qu'il a une solution et une seule (voir Appendice, n° 14). La surface a donc un centre et un seul.

Toute surface du second degré ayant un centre unique est dite *à centre* ou *centrale*. L'inégalité $\delta \neq 0$ est l'indice d'une surface centrale.

Si $\delta = 0$ le système (8) sera soit incompatible, soit indéterminé. C'est pourquoi, quand $\delta = 0$, la surface considérée ou bien n'a pas

de centre (comme, par exemple, le paraboloïde elliptique) ou bien possède une infinité de centres (comme, par exemple, le cylindre elliptique).

Si une surface n'a pas de centre, il est impossible de ramener son équation à la forme (9).

270. Le terme constant $\widetilde{L}$ de l'équation (9) s'exprime par une formule assez compliquée. Il est possible de simplifier considérablement cette formule.

En effet, en regroupant les termes du deuxième membre de l'égalité (6), nous obtenons:

$$\widetilde{L} = (Ax_0 + Dy_0 + Ez_0 + G)\,x_0 + (Dx_0 + By_0 + Fz_0 + H)\,y_0 + \\ + (Ex_0 + Fy_0 + Cz_0 + K)\,z_0 + (Gx_0 + Hy_0 + Kz_0 + L).$$

D'où et en vertu du système (8)

$$\widetilde{L} = Gx_0 + Hy_0 + Kz_0 + L. \tag{10}$$

271. Exemple. Soit l'équation

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 18 = 0.$$

Montrer qu'elle définit une surface à centre, trouver son centre et simplifier l'équation en reportant l'origine des coordonnées au centre.

Solution

$$\delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 162.$$

Etant donné que $\delta \neq 0$ l'équation donnée définit une surface centrale. Les coordonnées du centre peuvent être obtenues à partir des équations (8) qui dans le cas présent ont la forme

$$\begin{aligned} 7x_0 - 2y_0 \qquad - 3 &= 0, \\ -2x_0 + 6y_0 - 2z_0 - 12 &= 0, \\ -2y_0 + 5z_0 + 9 &= 0. \end{aligned}$$

En résolvant ce système, nous trouvons $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = -1$. Transportons l'origine des coordonnées au point $(1, 2, -1)$. Les coordonnées de tous les points se transforment suivant les formules

$$x = \widetilde{x} + 1, \quad y = \widetilde{y} + 2, \quad z = \widetilde{z} - 1$$

et l'équation donnée prendra la forme

$$7\widetilde{x}^2 + 6\widetilde{y}^2 + 5\widetilde{z}^2 - 4\widetilde{x}\widetilde{y} - 4\widetilde{y}\widetilde{z} + \widetilde{L} = 0.$$

On peut calculer le terme constant $\widetilde{L}$ suivant la formule (10). Autrement dit, $\widetilde{L} = -3x_0 - 12y_0 + 9z_0 + 18 = -18$. Par conséquent, nous obtenons l'équation dans le système de coordonnées $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, $\widetilde{z}$

$$7\widetilde{x}^2 + 6\widetilde{y}^2 + 5\widetilde{z}^2 - 4\widetilde{x}\widetilde{y} - 4\widetilde{y}\widetilde{z} - 18 = 0$$

(au n° 283 nous simplifierons encore cette équation et nous déterminerons, en même temps, le type et la position de la surface du second degré qu'elle définit).

§ 80. RÉDUCTION DE L'ÉQUATION D'UNE SURFACE CENTRALE DU SECOND DEGRÉ À SA PLUS SIMPLE EXPRESSION

272. Considérons une surface centrale du deuxième ordre quelconque. En transportant l'origine des coordonnées au centre, on peut donner à son équation la forme (9), § 79. Supposons que cette transformation soit déjà effectuée. Sans nous intéresser à l'origine de l'équation (9), § 79, nous désignerons de nouveau dans cette équation les coordonnées variables par les lettres x, y, z et le terme constant par L. Nous aurons donc

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+L=0. \qquad (1)$$

Nous réduirons l'équation (1) à sa plus simple expression en faisant subir aux axes de coordonnées une rotation autour de l'origine fixe.

273. Nous aurons besoin du théorème suivant.

T h é o r è m e 27. *Les milieux des cordes parallèles d'une surface du second degré se trouvent sur le même plan.*

Nous ferons la démonstration pour le cas d'une surface centrale en supposant que son équation a la forme (1).

Admettons que la direction commune au système donné de cor des parallèles soit déterminée par le vecteur non nul $\vec{a}=\{l, m, n\}$.

Considérons l'une quelconque de ces cordes; si $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ sont les extrémités de la corde, les coordonnées du milieu de cette corde seront

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (2)$$

Etant donné que la corde considérée est parallèle au vecteur $\vec{a}$, nous avons

$$\frac{x_2-x_1}{l}=\frac{y_2-y_1}{m}=\frac{z_2-z_1}{n};$$

d'où

$$x_2-x_1=lt, \quad y_2-y_1=mt, \quad z_2-z_1=nt, \qquad (3)$$

où t est un facteur de proportionnalité. Puisque les extrémités de la corde M_1 et M_2 appartiennent à la surface, leurs coordonnées doivent satisfaire à l'équation (1), c'est pourquoi les deux égalités suivantes seront vraies:

$$Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2+2Dx_1y_1+2Ex_1z_1+2Fy_1z_1+L=0. \qquad (4)$$

$$Ax_2^2+By_2^2+Cz_2^2+2Dx_2y_2+2Ex_2z_2+2Fy_2z_2+L=0. \qquad (5)$$

Soustrayant l'égalité (4) de l'égalité (5), nous aurons

$$A(x_2^2-x_1^2)+B(y_2^2-y_1^2)+C(z_2^2-z_1^2)+2D(x_2y_2-x_1y_1)+$$
$$+2E(x_2z_2-x_1z_1)+2F(y_2z_2-y_1z_1)=0. \qquad (6)$$

Remarquons à présent qu'en vertu des égalités (2) et (3),

$$(x_2^2 - x_1^2) = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = 2xlt. \tag{7}$$

De même,

$$(y_2^2 - y_1^2) = (y_2 + y_1)(y_2 - y_1) = 2ymt, \tag{8}$$

$$(z_2^2 - z_1^2) = (z_2 + z_1)(z_2 - z_1) = 2znt. \tag{9}$$

L'égalité suivante est juste

$$2(x_2y_2 - x_1y_1) = (x_2 + x_1)(y_2 - y_1) + (x_2 - x_1)(y_2 + y_1),$$

d'où et en vertu des égalités (2) et (3), nous avons

$$x_2y_2 - x_1y_1 = xmt + ylt. \tag{10}$$

De même,

$$x_2z_2 - x_1z_1 = xnt - zlt, \tag{11}$$

$$y_2z_2 - y_1z_1 = ynt + zmt. \tag{12}$$

En transformant l'égalité (6) à l'aide des égalités (7)-(12) et en divisant tous les termes par le facteur commun $2t$, nous aurons :

$$Alx + Bmy + Cnz + D(mx + ly) + E(nx + lz) + F(ny + mz) = 0,$$

ou

$$(Al + Dm + En)x + (Dl + Bm + Fn)y + (El + Fm + Cn)z = 0. \tag{13}$$

Nous voyons que les coordonnées x, y, z satisfont à une équation du premier degré. Par conséquent, les milieux des cordes considérées se trouvent sur le même plan, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Nous avons laissé de côté dans notre démonstration un point douteux. Pour être plus précis, nous n'avons pas vérifié que l'égalité (13) est bien une équation. Cette égalité serait une identité si toutes les expressions entre parenthèses s'annulaient. Il est toutefois facile d'établir que cette supposition est inadmissible. En effet, comme le vecteur $\vec{a} = \{l, m, n\}$ est non nul, les nombres l, m, n ne peuvent être nuls simultanément. Par conséquent, le système d'égalités

$$\left.\begin{aligned} Al + Dm + En &= 0, \\ Dl + Bm + Fn &= 0, \\ El + Fm + Cn &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

n'est possible qu'à condition que

$$\begin{vmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{vmatrix} = 0$$

(voir Appendice, n° 16). Mais ce déterminant n'est rien d'autre que le discriminant de l'équation de la surface donnée, c'est-à-dire δ (voir n° 269). Etant donné que la surface est supposée à centre, $\delta \neq 0$ et, par conséquent, les trois égalités (14) ne peuvent être vraies simultanément.

Par conséquent, quels que soient les trois nombres l, m, n (non nuls simultanément) l'égalité (13) sera toujours une *équation* du premier degré et définira donc toujours un plan.

274. Le plan auquel appartiennent les milieux des cordes d'une surface du second degré est dit *plan diamétral* conjugué à ces cordes. Si la surface est définie par une équation (1) et si les cordes sont parallèles au vecteur $\vec{a} = \{l, m, n\}$, le plan diamétral conjugué à ces cordes sera le plan défini par l'équation (13). L'équation (13) nous montre que tous les plans diamétraux passent par l'origine des coordonnées, c'est-à-dire par le centre de la surface donnée.

275. Dans le cas où les cordes parallèles sont perpendiculaires au plan diamétral qui leur est conjugué, la direction de ces cordes est dite *direction principale* par rapport à la surface du second degré donnée. Le plan diamétral conjugué aux cordes de direction principale est *le plan de symétrie* de la surface donnée (car il coupe en deux parties égales les cordes qui lui sont perpendiculaires).

276. Tâchons de trouver ne serait-ce qu'une direction principale d'une surface donnée. Lorsque nous l'aurons trouvée nous ferons passer un des axes de coordonnées suivant cette direction principale ; un des plans de coordonnées sera alors un plan de symétrie de cette surface (le plan perpendiculaire à l'axe choisi). Dans le nouveau système de coordonnées l'équation de la surface aura une forme simplifiée.

277. Le vecteur $\vec{a} = \{l, m, n\}$ est de direction principale s'il est perpendiculaire au plan défini par l'équation (13), c'est-à-dire si

$$\frac{Al+Dm+En}{l} = \frac{Dl+Bm+Fn}{m} = \frac{El+Fm+Cn}{n}.$$

Désignant par λ la valeur commune de ces rapports, nous obtenons les égalités

$$\left.\begin{aligned} Al+Dm+En &= \lambda l, \\ Dl+Bm+Fn &= \lambda m, \\ El+Fm+Cn &= \lambda n \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

soit

$$\left.\begin{aligned} (A-\lambda)\,l+Dm+En &= 0, \\ Dl+(B-\lambda)\,m+Fn &= 0, \\ El+Fm+(C-\lambda)\,n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

A partir de ces équations nous devons trouver les coordonnées inconnues l, m, n du vecteur non nul $\vec{a}$ (le nombre λ est également inconnu).

Pour que le système d'équations homogènes (16) possède une solution l, m, n non nulle, il faut et il suffit que son déterminant soit nul (voir Appendice, n° 16). Considérant comme nul le déterminant du système (16) nous aurons l'équation

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & D & E \\ D & B-\lambda & F \\ E & F & C-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (17)$$

qui nous permettra de déterminer les valeurs admissibles de la grandeur inconnue λ. L'équation (17) est dite *équation caractéristique* de la surface donnée.

L'équation caractéristique est une équation du *troisième* degré (il est facile de s'en convaincre en développant le déterminant qui constitue son premier membre). L'algèbre nous indique que toute équation du troisième degré a trois racines. Désignons les racines de l'équation caractéristique par λ_1, λ_2, λ_3. Il est de plus évident que tous les coefficients de l'équation (17) sont *réels*. L'algèbre nous indique que si tous les coefficients d'une équation du troisième degré sont réels, une racine au moins de cette équation doit être *réelle*. Soit par exemple λ_3 un nombre réel *. En posant dans les équations (16) $\lambda = \lambda_3$, nous obtiendrons un système dont les coefficients seront déjà des nombres donnés et dont le déterminant est nul. Etant donné cette dernière circonstance, ce système aura une solution non nulle. En prenant pour l, m, n une solution quelconque non nulle du système (6), nous aurons un vecteur non nul $\vec{a} = \{l, m, n\}$ pour direction principale par rapport à la surface considérée. La direction principale ainsi trouvée est dite correspondante à la racine λ_3 (les directions correspondant aux autres racines se déterminent de façon analogue).

Ainsi donc, nous avons montré qu'il est toujours possible pour une surface du second degré de trouver au moins une direction principale.

278. Sans changer l'origine des coordonnées, faisons tourner le système de coordonnées de façon que l'un quelconque des axes, le troisième par exemple, soit orienté dans la direction principale. En introduisant dans l'équation (1) les nouvelles coordonnées d'après les formules (8), § 77, nous obtiendrons une équation de même for-

* Nous verrons par la suite que les trois racines de l'équation caractéristique sont réelles.

me, mais dont les coefficients auront une autre valeur :

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + 2D'x'y' + 2E'x'z' + 2F'y'z' + L = 0 \quad (18)$$

le terme constant L restant inchangé.

Ecrivons le système (16) correspondant à la nouvelle équation de la surface donnée

$$\left.\begin{aligned} (A' - \lambda')\, l' + D'm' + E'n' &= 0, \\ D'l' + (B' - \lambda')\, m' + F'n' &= 0, \\ E'l' + F'm' + (C' - \lambda')\, n' &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Etant donné que le nouvel axe Oz' est direction principale par rapport à la surface donnée, le système (19) doit avoir une solution $l' = 0$, $m' = 0$, $n' \neq 0$. En remplaçant les lettres par leur valeur dans le système (19) nous trouverons

$$E' = 0, \quad F' = 0.$$

Par conséquent, l'équation (18) prend la forme

$$A'x'^2 + 2D'x'y' + B'y'^2 + C'z'^2 + L = 0. \quad (20)$$

Faisons tourner à présent le système d'axes de coordonnées autour de l'axe Oz' d'un certain angle α (l'axe Oz' restant immobile). Lors d'une telle transformation des axes, les coordonnées se transforment suivant les formules

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'' \cos\alpha - y'' \sin\alpha, \\ y' &= x'' \sin\alpha + y'' \cos\alpha, \\ z' &= z''. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

En choisissant comme il convient l'angle α, nous pouvons ramener l'ensemble des trois premiers termes de l'équation (20) à la forme réduite (voir § 43) :

$$A'x'^2 + 2D'x'y' + By'^2 = A''x''^2 + B''y''^2.$$

En même temps l'équation de la surface donnée est réduite à sa plus simple expression

$$A''x''^2 + B''y''^2 + C'z''^2 + L = 0. \quad (22)$$

279. Comme le montre l'équation (22), chaque plan de coordonnées du n o u v e a u système est un plan de symétrie. Par conséquent, *toute surface centrale du second degré possède trois directions principales perpendiculaires deux à deux, qui sont les directions des nouveaux axes de coordonnées.*

Si les coefficients A'', B'', C' sont t o u s d i f f é r e n t s, la surface n'a pas d'autres directions principales que celles qui ont

été indiquées. S'il y a deux coefficients égaux parmi les coefficients A'', B'', C', la surface possède une infinité de directions principales. Par exemple, si $A'' = B''$ tout plan passant par l'axe Oz' sera un plan de symétrie et, par conséquent, toute direction perpendiculaire à cet axe sera une direction principale. Si $A'' = B'' = C'$ toutes les directions de l'espace seront des directions principales par rapport à la surface donnée.

Nous avons ramené plus haut l'équation (1) à la forme (22) en deux étapes: nous avons d'abord orienté un des axes de coordonnées suivant une direction principale, puis nous avons donné des directions principales aux deux autres axes. Dans la pratique quand il s'agit de réduire à sa plus simple expression l'équation d'une surface centrale, dont les coefficients sont des nombres fixés, il n'est pas nécessaire de scinder ainsi les opérations. Il convient de trouver tout d'abord les trois directions principales perpendiculaires deux à deux de la surface puis d'orienter suivant ces directions les nouveaux axes de coordonnées (la technique des calculs sera indiquée au n° 283).

280. Nous allons prouver à présent une égalité importante:

$$C' = \lambda_3, \tag{23}$$

(rappelons au lecteur que nous avons orienté l'axe Oz' suivant la direction principale qui correspond à la racine λ_3 de l'équation caractéristique, voir n^{os} 277 et 278).

Pour nous convaincre de la véracité de l'égalité (23), cherchons les points d'intersection de l'axe Oz' avec la surface donnée en utilisant d'une part l'équation (22) et d'autre part l'équation initiale (1).

En posant dans l'équation (22) $x'' = 0$, $y'' = 0$, nous trouvons

$$C'z''^2 + L = 0. \tag{24}$$

Cette égalité définit la cote z'' des points cherchés dans le nouveau système de coordonnées. Il peut se produire que nous trouvions à partir de l'équation (24) une valeur imaginaire pour z''; nous changerons alors le signe de L (c'est-à-dire que nous considérerons une autre surface) après quoi z'' deviendra réel. On peut parfaitement remplacer L par une autre valeur pour la démonstration de l'équation (23) car la valeur de L n'influe aucunement sur les transformations des autres termes de l'équation (1).

Cherchons à présent les points d'intersection de l'axe Oz' avec la surface considérée dans l'ancien système de coordonnées. La direction de l'axe Oz' est définie par le vecteur $\vec{a} = \{l, m, n\}$ dont les coordonnées l, m, n satisfont au système (16) pour $\lambda = \lambda_3$. Pour plus de commodité nous supposerons que le vecteur $\vec{a}$ est un vecteur

unitaire, c'est-à-dire que

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \tag{25}$$

Ecrivons les équations paramétriques de l'axe Oz' (dans l'ancien système de coordonnées)

$$x = lt, \quad y = mt, \quad z = nt. \tag{26}$$

Les trois équations scalaires (26) sont équivalentes à l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = t\vec{a}, \tag{27}$$

où M est un point de coordonnées x, y, z. Etant donné que le vecteur $\vec{a}$ est un vecteur unitaire, il découle de l'équation (27) que t exprime la grandeur du segment $\overline{OM}$ sur l'axe Oz'. Mais la nouvelle cote du point M exprime la même valeur. Donc,

$$z' = t. \tag{28}$$

Pour trouver la valeur de t correspondant aux points d'intersection de l'axe Oz' avec la surface donnée, remplaçons dans l'équation (1) x, y, z par leurs valeurs prises dans les égalités (26). Il vient

$$(Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2Dlm + 2Eln + 2Fmn)\, t^2 + L = 0,$$

soit

$$[l(Al + Dm + En) + m(Dl + Bm + Fn) + \\ + n(El + Fm + Cn)]\, t^2 + L = 0. \tag{29}$$

A partir des équations (16) ou des équations (15) qui leur sont équivalentes, nous trouvons pour $\lambda = \lambda_3$:

$$Al + Dm + En = \lambda_3 l,$$
$$Dl + Bm + Fn = \lambda_3 m,$$
$$El + Fm + Cn = \lambda_3 n.$$

En transformant à l'aide de ces relations l'égalité (29), nous obtenons

$$\lambda_3 (l^2 + m^2 + n^2)\, t^2 + L = 0;$$

d'où et en vertu de (25)

$$\lambda_3 t^2 + L = 0. \tag{30}$$

En vertu de (24), (28) et (30) il vient $C' = \lambda_3$, ce qu'il fallait démontrer.

Les coefficients A'' et B'' s'expriment de même. En effet, A'' coïncide avec la valeur de la racine de l'équation caractéristique qui correspond à la direction principale donnée au nouvel axe des abscisses, et B'' coïncide avec la valeur de la racine de l'équation caractéristique à laquelle correspond la direction principale donnée au nouvel axe des ordonnées.

281. Supposons que dans l'équation (22) les coefficients A'', B'' et C' soient tous différents. Étant donné que chacun de ces coefficients est égal à une des racines de l'équation caractéristique, il en résulte que toutes les racines de l'équation caractéristique sont différentes. En numérotant comme il convient ces racines, nous aurons $A'' = \lambda_1$, $B'' = \lambda_2$, $C' = \lambda_3$ et l'équation (22) prendra la forme

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + L = 0. \qquad (31)$$

Réciproquement, s'il n'y a pas de racines égales parmi les racines λ_1, λ_2, λ_3, après réduction de l'équation (1) à la forme (22), tous les coefficients A'', B'', C' seront différents (en d'autres termes, il ne peut pas arriver que deux de ces coefficients coïncident avec la même racine). Nous ne démontrerons pas cette réciproque.

S'il y a deux racines égales parmi les trois racines λ_1, λ_2, λ_3, la troisième étant différente, nous aurons dans l'équation (22) deux coefficients égaux seulement, leur valeur commune étant égale à la valeur commune des racines qui coïncident.

Enfin, si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, nous aurons $A'' = B'' = C'$ $(= \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3)$. Nous ne nous attarderons pas non plus à prouver ces propositions.

282. La circonstance suivante a une importance de principe : si la surface est centrale, c'est-à-dire si la condition $\delta \neq 0$ est respectée, il n'y a pas de racines nulles parmi les racines de son équation caractéristique.

En effet, si nous remplaçons λ dans l'équation caractéristique (17) par 0, nous aurons une fausse égalité, car nous aurons alors dans le premier membre de l'équation le discriminant de l'équation, c'est-à-dire δ, mais par hypothèse $\delta \neq 0$. Comme toutes les racines de l'équation caractéristique sont différentes de zéro, il en découle que dans l'équation (22) aucun des coefficients A'', B'', C' ne peut être nul.

283. Tout ce qui a été énoncé dans le présent paragraphe permet de tirer la conclusion générale suivante : *une équation quelconque définissant une surface du second degré peut être réduite par transformation des coordonnées à la forme* (22), *ou, ce qui revient au même, à la forme* (3), § 72. *Tous les coefficients de l'ensemble des termes du second degré seront différents de zéro. Par conséquent, tous les types possibles de surfaces du second degré ont été énumérés dans les* §§ 72 *et* 73.

284. Exemple 1. Soit l'équation

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+18=0. \qquad (32)$$

Transformer le système de coordonnées de façon à réduire l'équation à sa plus simple expression ; établir le type et la position de la surface définie par l'équation donnée.

Solution. Nous avons déjà examiné cette équation dans l'exemple du n° 271. Elle définit une surface centrale, car $\delta \neq 0$. Le centre est le point $S(1, 2, -1)$. La transformation des coordonnées correspondant au transfert de l'origine au centre est $x=\tilde{x}+1$, $y=\tilde{y}+2$, $z=\tilde{z}-1$; elle réduit cette expression à la forme :

$$7\tilde{x}^2+6\tilde{y}^2+5\tilde{z}^2+4\tilde{x}\tilde{y}-4\tilde{y}\tilde{z}-18=0 \qquad (33)$$

(voir n° 271). Nous opérerons les simplifications ultérieures en suivant les indications données dans ce paragraphe. Formons tout d'abord l'équation caractéristique (17). Il vient :

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0$$

soit

$$\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162=0.$$

Les racines de cette équation sont $\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=9$.

Formons à présent le système d'équations (16) correspondant au problème donné

$$\left.\begin{aligned} (7-\lambda)\,l-2m &=0, \\ -2l+(6-\lambda)\,m-2n &=0, \\ -2m+(5-\lambda)\,n &=0. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

En posant dans les équations (34) $\lambda=\lambda_1=3$, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} 4l-2m &=0, \\ -2l+3m-2n &=0, \\ -2m+2n &=0. \end{aligned}\right\}$$

On peut prendre, par exemple, en qualité de solution non nulle de ce système $l=1$, $m=2$, $n=2$. Par conséquent, la direction principale, qui correspond à la racine $\lambda=3$, est celle que détermine le vecteur $\vec{a}_1=\{1, 2, 2\}$.

En posant dans les équations (34) $\lambda=\lambda_2=6$, nous aurons

$$\begin{aligned} l-2m &=0, \\ -2l-2n &=0, \\ -2m-n &=0. \end{aligned}$$

On peut prendre en qualité de solution non nulle de ce système $l=2$, $m=1$, $n=-2$. Par conséquent, la direction principale correspondant à la racine $\lambda_2=6$ sera celle donnée par le vecteur $\vec{a}_2=\{2, 1, -2\}$.

Posant dans les équations (34) $\lambda = \lambda_3 = 9$, nous aurons

$$-2l-2m=0,$$
$$-2l-3m-2n=0,$$
$$-2m-4n=0.$$

On peut prendre, par exemple, en qualité de solution non nulle de ce système $l = 2$, $m = -2$, $n = 1$. Par conséquent, la direction principale correspondant à la racine $\lambda_3 = 9$ sera celle que détermine le vecteur $\vec{a_3} = \{2; -2; 1\}$.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ nous permet de nous convaincre que chacun de ces vecteurs est perpendiculaire aux deux autres ($\vec{a_1}\vec{a_2} = 0$, $\vec{a_1}\vec{a_3} = 0$, $\vec{a_2}\vec{a_3} = 0$) (cette vérification est superflue, car en vertu de ce qui a été exposé dans les §§ 279-281, lorsque toutes les racines sont différentes, la surface possède trois directions principales deux à deux perpendiculaires). Dirigeons les nouveaux axes suivant les vecteurs $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$. Pour établir les formules de transformation des coordonnées, trouvons les vecteurs de la base de nouveaux axes:

$$\vec{i'} = \frac{\vec{a_1}}{|\vec{a_1}|} = \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\},$$

$$\vec{j'} = \frac{\vec{a_2}}{|\vec{a_2}|} = \left\{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right\},$$

$$\vec{k'} = \frac{\vec{a_3}}{|\vec{a_3}|} = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\}.$$

D'où et en vertu du n° 260, nous trouvons les formules cherchées:

$$\tilde{x} = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z',$$

$$\tilde{y} = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z',$$

$$\tilde{z} = \frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z'.$$

On peut écrire tout de suite le résultat de la réduction de l'équation (33) par rapport aux nouvelles coordonnées [voir n° 281, équation (31)]:

$$3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 - 18 = 0,$$

soit

$$\frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{3} + \frac{z'^2}{2} = 1.$$

Ainsi donc l'équation (32) définit un ellipsoïde dont les demi-axes sont: $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$. Le centre de cet ellipsoïde a pour anciennes coordonnées (1, 2, −1), les directions des axes sont définies par les vecteurs unitaires suivants

$$\vec{i'}=\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \quad \vec{j'}=\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\},$$
$$\vec{k'}=\left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}.$$

Exemple 2. Soit l'équation

$$x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz+6=0. \tag{35}$$

Transformer le système de coordonnées de façon que l'équation donnée soit réduite à sa plus simple expression. Etablir le type et la position de la surface définie par cette équation.

Solution. Calculons le discriminant de l'équation donnée

$$\delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}=54.$$

Etant donné que $\delta \neq 0$ l'équation donnée définit une surface centrale; étant donné que cette équation a la forme (1) § 80 (et ne contient pas de termes du premier degré) le centre de la surface se confond déjà avec l'origine des coordonnées. Il ne nous reste donc plus qu'à effectuer la rotation des axes de coordonnées. Formons l'équation caractéristique (17). Pour le cas qui nous intéresse, nous aurons

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

ou

$$\lambda^3-27\lambda-54=0.$$

Les racines de cette équation sont $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=6$. Formons à présent pour ce problème le système d'équations (16) :

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda)\,l+2m-4n&=0, \\ 2l-(2+\lambda)\,m-2n&=0, \\ -4l-2m+(1-\lambda)\,n&=0. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

En posant dans l'équation (36) $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=-3$, nous aurons

$$\begin{aligned} 4l+2m-4n&=0, \\ 2l+m-2n&=0, \\ -4l-2m+4n&=0. \end{aligned}$$

Nous voyons que ces équations sont identiques. Nous pouvons donc choisir pour l, m, n des nombres arbitraires à condition que

$$2l+m-2n=0. \tag{37}$$

Par conséquent, lorsque deux racines sont égales $\lambda_1=\lambda_2=-3$, nous aurons une infinité de directions principales (voir nos 279-281); nous devons prendre n'importe quel couple de solutions de l'équation (37), mais de façon qu'elles satisfassent à la condition de perpendicularité; prenons, par exemple, $l=1$, $m=2$, $n=2$ et $l=2$, $m=-2$, $n=1$.

Nous obtenons ainsi deux vecteurs orthogonaux $\vec{a_1} = \{1, 2, 2\}$ et $\vec{a_2} = \{2, -2, 1\}$ qui définissent deux directions principales correspondant aux racines égales $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$.

Posant enfin dans les équations (36) $\lambda = \lambda_3 = 6$, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} -5l+2m-4n=0,\\ 2l-8m-2n=0,\\ -4l-2m-5n=0. \end{aligned}\right\}$$

On peut choisir en qualité de solution non nulle de ce système, par exemple, $l = 2, m = 1, n = -2$. Par conséquent, la direction principale, qui correspond à la racine $\lambda_3 = 6$, sera celle qui est définie par le vecteur $\vec{a_3} = \{2, 1, -2\}$. Il est facile de se convaincre que le vecteur $\vec{a_3}$ est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$.

Dirigeons les nouveaux axes suivant les directions principales, c'est-à-dire suivant les vecteurs $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$. Pour établir les formules des transformations des coordonnées trouvons les vecteurs de base des nouveaux axes:

$$\vec{i'} = \frac{\vec{a_1}}{|\vec{a_1}|} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\},$$

$$\vec{j'} = \frac{\vec{a_2}}{|\vec{a_2}|} = \left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\},$$

$$\vec{k'} = \frac{\vec{a_3}}{|\vec{a_3}|} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\}.$$

D'où et en vertu de l'énoncé du n° 260, nous trouvons les formules cherchées

$$x = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z',$$

$$y = \frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z',$$

$$z = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z'.$$

Conformément au n° 281, connaissant les racines λ_1, λ_2, λ_3, on peut écrire tout de suite le résultat de la transformation de l'équation (35) dans le nouveau système de coordonnées

$$-3x'^2 - 3y'^2 + 6z'^2 + 6 = 0$$

ou encore

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{1} = 1.$$

Ainsi donc l'équation donnée définit un hyperboloïde de révolution à une nappe dont les demi-axes sont $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$ (voir n^{os} 244, 245). Le centre de cet hyperboloïde se trouve à l'origine de l'ancien système de coordonnées, la direction des axes est définie par les vecteurs unitaires suivants

$$\vec{i'} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \quad \vec{j'} = \left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}, \quad \vec{k'} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\}.$$

§ 81. RÉDUCTION DE L'ÉQUATION D'UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ À SA PLUS SIMPLE EXPRESSION POUR LE CAS OÙ $\delta = 0$

285. Si $\delta = 0$ le système d'équations définissant le centre (8), § 79, sera soit incompatible, soit indéterminé. Au cas où ce système est incompatible, la surface n'a pas de centre et il est donc impossible de simplifier son équation suivant le plan établi aux §§ 79 et 80.

Pour réduire l'équation (1), § 79, à sa plus simple expression lorsque $\delta = 0$, il est indiqué de commencer par la rotation des axes de coordonnées (l'origine restant immobile) et de simplifier avant tout l'ensemble des termes du second degré. Du point de vue purement algébrique, ces transformations ne se distinguent en rien de celles que nous avons effectuées lorsque nous avons simplifié l'ensemble des termes du second degré de l'équation (1), § 80. Après simplification, l'ensemble des termes du second degré prendra la forme

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2,$$

où λ_1, λ_2, λ_3 sont les racines de l'équation caractéristique, et x', y', z' les nouvelles coordonnées variables. Cependant, à l'inverse de ce que nous avions pour une surface centrale, au moins une des racines λ_1, λ_2, λ_3 sera nulle. En effet, si nous remplaçons λ par zéro dans l'équation caractéristique (17), § 80, cette équation sera une égalité juste, car elle aura pour premier membre le discriminant de l'équation, c'est-à-dire δ ; or, par hypothèse $\delta = 0$. Soit, par exemple, $\lambda_3 = 0$; alors, après simplification, l'ensemble des termes du second degré sera de la forme

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2.$$

L'équation tout entière dans le nouveau système de coordonnées prendra la forme

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2G'x' + 2H'y' + 2K'z' + L' = 0. \qquad (1)$$

Les simplifications ultérieures de l'équation seront obtenues par translation des nouveaux axes de coordonnées. Après une translation judicieuse des axes, l'équation (1) sera ramenée à une des plus simples expressions énumérées aux §§ 74 et 75. Le meilleur est de montrer en quoi consiste cette transformation sur un exemple concret.

Exemple. Réduire à sa plus simple expression l'équation

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0 \qquad (2)$$

et établir le type de surface qu'elle définit.

Solution. Calculons le discriminant de l'équation

$$\delta=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

Etant donné que $\delta = 0$, la surface envisagée n'a pas de centre et nous commencerons par simplifier l'ensemble des termes du second degré.

Composons le système de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

ou

$$\lambda^3-7\lambda^2+10\lambda=0.$$

Les racines de cette équation sont $\lambda_1=2$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=0$. Formons pour le problème donné le système d'équations (16) § 80:

$$\left.\begin{aligned} (2-\lambda)\,l+2m+n&=0,\\ 2l+(2-\lambda)\,m+n&=0,\\ l+m+(3-\lambda)\,n&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Substituons dans les équations (3) $\lambda=\lambda_1=2$, nous aurons

$$\begin{aligned} 2m+n&=0,\\ 2l+n&=0,\\ l+m+n&=0. \end{aligned}$$

En qualité de solution non nulle de ce système on peut prendre, par exemple, $l = 1$, $m = 1$, $n = -2$; nous aurons en conséquence le vecteur $\vec{a}_1 = \{1, 1, -2\}$.

En posant dans les équations (3) $\lambda = \lambda_2 = 5$, nous aurons

$$\begin{aligned} -3l+2m+n&=0,\\ 2l-3m+n&=0,\\ l+m-2n&=0. \end{aligned}$$

En qualité de solution non nulle de ce système on peut prendre, par exemple, $l=1$, $m=1$, $n=1$, ce qui nous donne le vecteur $\vec{a}_2=\{1, 1, 1\}$.

Substituons dans les équations (3) $\lambda=\lambda_3=0$, nous aurons:

$$\begin{aligned} 2l+2m+n&=0,\\ 2l+2m+n&=0,\\ l+m+3n&=0. \end{aligned}$$

En qualité de solution non nulle de ce système on peut prendre, par exemple, $l = 1$, $m = -1$, $n = 0$, ce qui nous donne le vecteur $\vec{a}_3 = \{1, -1, 0\}$. En pre-

nant les produits scalaires des vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ deux à deux, nous pourrons nous convaincre que $\vec{a}_1\vec{a}_2 = 0$, $\vec{a}_1\vec{a}_3 = 0$, $\vec{a}_2\vec{a}_3 = 0$; autrement dit, chacun de ces vecteurs est perpendiculaire aux deux autres.

Dirigeons les nouveaux axes suivant les vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Pour établir les formules de transformation des coordonnées, cherchons les vecteurs de base des nouveaux axes :

$$\vec{i}' = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right\},$$

$$\vec{j}' = \frac{\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\},$$

$$\vec{k}' = \frac{\vec{a}_3}{|\vec{a}_3|} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\};$$

d'où et en vertu du n° 260, nous trouvons les formules qui nous intéressent

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z',$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z',$$

$$z = -\frac{2}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y'.$$

Connaissant les racines de l'équation caractéristique, nous pouvons écrire tout de suite le résultat de la transformation de l'ensemble des termes du second degré de l'équation (2) dans le nouveau système de coordonnées, ce qui nous donne $2x'^2 + 5y'^2$. Nous écrirons les autres termes de l'équation (2) dans le nouveau système de coordonnées en profitant des formules précédentes:

$$-4x + 6y - 2z + 3 = \sqrt{6}x' - 5\sqrt{2}z' + 3.$$

Par conséquent, l'équation de la surface donnée dans le nouveau système de coordonnées prend la forme

$$2x'^2 + 5y'^2 + \sqrt{6}x' - 5\sqrt{2}z' + 3 = 0,$$

ou, après regroupement des termes

$$2\left(x'^2 + \frac{\sqrt{6}}{2}x'\right) + 5y'^2 - 5\sqrt{2}z' + 3 = 0.$$

En mettant les expressions entre parenthèses sous forme de carrés parfaits, nous obtenons

$$2\left(x' + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + 5y'^2 - 5\sqrt{2}\left(z' - \frac{9\sqrt{2}}{40}\right) = 0.$$

Effectuons à présent la translation des axes de façon que les coordonnées se transforment suivant les formules

$$x' = x'' - \frac{\sqrt{6}}{4},$$
$$y' = y'',$$
$$z' = z'' + \frac{9\sqrt{2}}{40}.$$

Nous avons obtenu la forme la plus simple de l'équation de la surface donnée

$$2x''^2 + 5y''^2 - 5\sqrt{2}z'' = 0,$$

soit

$$5\sqrt{2}z'' = 2x''^2 + 5y''^2.$$

Conformément au n° 252, nous concluons : la surface donnée est un paraboloïde elliptique.

APPENDICE

ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES DÉTERMINANTS

§ 1. DÉTERMINANTS DU DEUXIÈME ORDRE ET SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À DEUX INCONNUES

1. Soit le tableau carré de quatre nombres a_1, a_2, b_1, b_2 :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Le nombre $a_1b_2 - a_2b_1$ est appelé déterminant du deuxième ordre correspondant au tableau (1). Ce déterminant est désigné par le symbole $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; nous avons donc :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{2}$$

Les nombres a_1, a_2, b_1, b_2 sont appelés *éléments du déterminant*. On dit que les éléments a_1, b_2 appartiennent à la *diagonale principale* du déterminant et les éléments a_2, b_1 à la *diagonale non principale*. Par conséquent, *un déterminant du deuxième ordre est égal à la différence des produits des éléments de la diagonale principale et de la diagonale non principale.*

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 - (-4) \cdot 5 = 14.$$

2. Indiquons comment on applique les déterminants du deuxième ordre dans la discussion et la solution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Soit le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= h_1, \\ a_2x + b_2y &= h_2, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

dont les inconnues sont x et y (les coefficients a_1, b_1, a_2, b_2 et les seconds membres h_1, h_2 sont supposés donnés). Le couple de nombres x_0, y_0 est appelé solution du système (3) si ces nombres satisfont au système (3), c'est-à-dire si en remplaçant les lettres x, y respecti-

vement par les nombres x_0, y_0 nous faisons de chacune des équations (3) des identités arithmétiques.

Cherchons toutes les solutions du système (3). Nous en ferons la discussion parallèlement, c'est-à-dire que nous établirons dans quels cas le système (3) n'a qu'une seule solution, dans quels cas il en a plus d'une et dans quels cas il n'a aucune solution. Nous userons du procédé, bien connu, d'élimination des inconnues. Multiplions tous les termes de la première équation par b_2, ceux de la deuxième par $-b_1$ et additionnons membre à membre les deux équations obtenues. L'inconnue y se trouve ainsi exclue et nous obtenons:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,x = b_2h_1 - b_1h_2. \tag{4}$$

De même, en éliminant du système (3) l'inconnue x nous trouvons:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,y = a_1h_2 - a_2h_1. \tag{5}$$

Introduisons les désignations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}, \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

On pourra alors écrire les équations (4) et (5) comme suit:

$$\Delta \cdot x = \Delta_x, \quad \Delta \cdot y = \Delta_y. \tag{7}$$

Le déterminant Δ, composé des coefficients des inconnues du système (3), est appelé *déterminant du système*. Le déterminant Δ_x est obtenu en remplaçant les éléments de la première colonne du déterminant Δ par les seconds membres du système (3); le déterminant Δ_y est obtenu en remplaçant par ces seconds membres les éléments de la deuxième colonne du déterminant Δ.

Supposons $\Delta \neq 0$. Cette condition étant remplie, nous obtiendrons à partir des équations (7)

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

ou en développant

$$x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \\ \hline a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \\ \hline a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Ces formules donnent évidemment la solution du système déduit (7). Ce sont elles également qui donnent la solution du système d'origine (3).

Pour nous en convaincre, il convient de remplacer les inconnues x et y dans les premiers membres des équations (3) par les formules (8); après cette substitution (en développant les déterminants Δ, Δ_x, Δ_y et effectuant quelques opérations élémentaires) nous trouvons que le premier membre de la première équation (3) est égal au nombre h_1 et le premier membre de la deuxième équation (3) au nombre h_2, ce qui signifie que la formule (8) donne la solution du système (3).

D'après ce que nous venons d'énoncer, nous pouvons émettre la proposition suivante: *si le déterminant* Δ *du système* (3) *n'est pas nul, ce système a une solution unique déterminée par les formules* (8).

3. *Supposons à présent que* $\Delta = 0$. *Si de plus l'un quelconque des déterminants* Δ_x, Δ_y *est différent de zéro, le système* (3) *n'a pas de solution* (on dit que les équations de ce système sont incompatibles).

En effet, si $\Delta = 0$, mais ne serait-ce que l'un des déterminants Δ_x, Δ_y n'est pas nul, une au moins des égalités (7) est impossible, c'est-à-dire que le système (7) n'a pas de solution. Mais dans ce cas le système (3) n'a pas de solution non plus, car le système (7) découle du système (3) et, par conséquent, chaque solution du système (3) serait également une solution du système (7), si une telle solution existait.

Si $\Delta = 0$ *et en même temps* $\Delta_x = \Delta_y = 0$, *le système* (3) *possède une infinité de solutions* (dans ce cas une des équations du système découle de l'autre).

En effet, si $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, c'est-à-dire si

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \quad a_1h_2 - a_2h_1 = 0, \quad b_1h_2 - b_2h_1 = 0,$$

les coefficients des inconnues et les termes constants de ces équations sont proportionnels. Cela signifie précisément qu'une des équations du système est obtenue en multipliant tous les termes de l'autre équation par un facteur commun, ce qui signifie qu'il n'y a dans ce système qu'une équation substantielle, par exemple $a_1x + b_1y = h_1$, et que la deuxième n'est qu'une conséquence de la première. Mais une équation de forme $a_1x + b_1y = h_1$ possède toujours une infinité de solutions, puisque l'on peut donner à l'une quelconque des inconnues x ou y des valeurs numériques arbitraires, en définissant la deuxième à partir de l'équation (par exemple, si $b_1 \neq 0$, nous pouvons en choisissant x de façon arbitraire déterminer y d'après la formule $y = \frac{-a_1x+h_1}{b_1}$).

Remarque. On a supposé durant ces raisonnements que chaque équation du système possède une solution. Si on prend éga-

lement en considération des systèmes comportant des égalités contradictoires l'affirmation énoncée ne sera pas vraie. Par exemple, le système

$$0\cdot x+0\cdot y=1$$
$$0\cdot x+0\cdot y=1$$

vérifie les conditions $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ mais toutefois n'admet aucune solution.

4. Ainsi donc, *si le déterminant du système* (3) *n'est pas nul* ($\Delta \neq 0$), *le système possède une seule solution* (*déterminée par la formule* (8)), *si* $\Delta = 0$, *le système a soit une infinité de solutions, soit aucune.*

Exemple 1. Trouver toutes les solutions du système

$$\left.\begin{aligned} 3x+4y&=2,\\ 2x+3y&=7. \end{aligned}\right\}$$

Solution. Calculons le déterminant du système

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3\cdot 3-2\cdot 4=1.$$

Etant donné que $\Delta \neq 0$, le système possède une seule solution définie par les formules (8). Trouvons Δ_x et Δ_y :

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & 4\\ 7 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-4\cdot 7=-22.$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 2\\ 2 & 7\end{vmatrix}=3\cdot 7-2\cdot 2=17.$$

D'où

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-22}{1}=-22, \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{17}{1}=17.$$

Exemple 2. Trouver toutes les solutions du système

$$\left.\begin{aligned} 3x+4y&=1,\\ 6x+8y&=3. \end{aligned}\right\}$$

Solution. Calculons le déterminant du système :

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 4\\ 6 & 8\end{vmatrix}=3\cdot 8-4\cdot 6=0.$$

Etant donné que $\Delta = 0$, le système considéré possède soit une infinité de solutions, soit aucune. Pour établir quelle est celle des deux éventualités qui est la vraie en l'occurrence, trouvons Δ_x et Δ_y :

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 4\\ 3 & 8\end{vmatrix}=8-12=-4,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 6 & 3\end{vmatrix}=9-6=3.$$

Etant donné que $\Delta = 0$, mais $\Delta_x \neq 0$ et $\Delta_y \neq 0$, le système donné n'a pas de solution.

Remarque. On peut aboutir directement à la même conclusion en multipliant tous les termes de la première équation par 2 et en la soustrayant membre à membre de la deuxième équation. Nous obtiendrons $0 = 1$, c'est-à-dire une égalité contradictoire. Par conséquent, les équations données sont incompatibles.

Exemple 3. Trouver toutes les solutions du système

$$\left.\begin{aligned} 3x+4y&=1,\\ 6x+8y&=2. \end{aligned}\right\}$$

Solution. Les coefficients de x et y sont les mêmes que dans l'exemple 2. Donc $\Delta = 0$. Par conséquent, le système donné a soit une infinité de solutions, soit aucune. Mais il est facile de remarquer que la deuxième équation découle de la première (par multiplication de tous les termes de la première équation par 2). Par conséquent, étant donné que le système se réduit à une seule équation, il possède une infinité de solutions. Nous les trouverons en donnant à x des valeurs numériques arbitraires et en définissant les valeurs correspondantes de y par la formule

$$y = \frac{1-3x}{4}.$$

5. Examinons en particulier un système de deux équations homogènes à deux inconnues

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y&=0,\\ a_2x+b_2y&=0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

c'est-à-dire un système d'équations dont les seconds membres sont nuls.

Il est évident qu'un tel système possède toujours une *solution banale*: $x = 0$, $y = 0$. Si $\Delta \neq 0$, ce système possède en plus de sa solution banale une infinité d'autres solutions (étant donné que pour un système homogène la possibilité de l'absence de solution est exclue). On pourrait formuler ces mêmes conclusions comme suit: *le système homogène* (9) *n'a une solution non nulle que si* $\Delta = 0$.

§ 2. SYSTÈME HOMOGÈNE DE DEUX ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À TROIS INCONNUES

6. Examinons un système de deux équations homogènes

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

à trois inconnues x, y, z. Supposons que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Mettons le système (1) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= -c_1z, \\ a_2x + b_2y &= -c_2z \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

et supposons qu'une certaine valeur numérique est assignée à l'inconnue z. Pour une valeur déterminée de z, le système (3) possède une solution unique que nous obtiendrons en appliquant les formules (8), § 1 :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1z \\ a_2 & -c_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Les nombres x et y avec le nombre z constituent la solution du système (1) ; *les valeurs différentes des solutions numériques du système* (1) *correspondent aux différentes valeurs numériques de z* (le système (1) possède une infinité de solutions, puisque z a été choisi de façon arbitraire).

Donnons une forme plus commode aux formules (4). Remarquons tout d'abord que

$$\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} z, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & -c_1z \\ a_2 & -c_2z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} z.$$

En nous basant sur ces égalités, nous pouvons transcrire les formules (4) comme suit :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{5}$$

Introduisons les désignations :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Nous avons à présent, en vertu des formules (5),

$$x = \frac{\Delta_1 \cdot z}{\Delta_3}, \qquad y = \frac{-\Delta_2 \cdot z}{\Delta_3}. \tag{7}$$

Désignons $\frac{z}{\Delta_3}$ par t. Dans ce cas $z=\Delta_3\cdot t$, et, en vertu des formules (7), x et y s'exprimeront par les égalités:

$$x=\Delta_1\cdot t, \qquad y=-\Delta_2\cdot t.$$

Ce qui nous donne *les formules*

$$x=\Delta_1\cdot t, \quad y=-\Delta_2\cdot t, \quad z=\Delta_3\cdot t \tag{8}$$

qui déterminent toutes les solutions du système (1) (chaque solution est obtenue pour une valeur définie de t).

Pour la pratique des calculs, il est utile de remarquer que les déterminants Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont obtenus en supprimant, tour à tour, les colonnes du tableau

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

7. Les raisonnements précédents découlaient de la supposition que $\Delta_3 \neq 0$ (voir inégalité (2)).

Dans le cas où $\Delta_3 = 0$, mais l'un quelconque des déterminants Δ_1, Δ_2 n'est pas nul, les raisonnements seront les mêmes que précédemment, à part l'interversion des rôles des inconnues (si, par exemple, $\Delta_2 \neq 0$, c'est à y que l'on assignera des valeurs arbitraires, x et z étant déterminés à partir des équations du système). Le résultat final est le même, c'est-à-dire que toutes les solutions du système sont fournies par les formules (8).

Si les trois déterminants Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont nuls, c'est-à-dire si

$$b_1c_2-b_2c_1=0, \qquad a_1c_2-a_2c_1=0, \qquad a_1b_2-b_1a_2=0,$$

les coefficients du système (1) sont proportionnels. Dans ce cas, une des équations du système découle de l'autre: l'une des équations est obtenue en multipliant tous les termes de l'autre par un facteur numérique. Ainsi donc, si $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$ le système se réduit, en fait, à une seule équation. Un tel système a, de toute évidence, une infinité de solutions; pour en trouver une, il convient de donner *à deux inconnues* des valeurs arbitraires et de trouver la troisième à partir de l'équation.

Exemple 1. Trouver toutes les solutions du système:

$$\left.\begin{aligned} 3x+5y+8z=0, \\ 7x+2y+4z=0. \end{aligned}\right\}$$

Solution. En vertu du n° 6, nous avons

$$\Delta_1=4, \qquad \Delta_2=-44, \qquad \Delta_3=-29.$$

Toutes les solutions de ce système sont fournies par les formules

$$x=4t, \quad y=44t, \quad z=-29t,$$

où t est arbitraire.

Exemple 2. Trouver toutes les solutions du système

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y-3z&=0,\\ 6x+4y-6z&=0. \end{aligned}\right\}$$

Solution. Nous avons $\Delta_1=0$, $\Delta_2=0$, $\Delta_3=0$. Le système ne comprend qu'une équation substantielle (la deuxième est obtenue en multipliant tous les termes de la première par 2). Toute solution du système est composée de trois nombres x, y, z dont deux, x et y, sont arbitraires et

$$z=\frac{3x+2y}{3}.$$

§ 3. DÉTERMINANTS DU TROISIÈME ORDRE

8. Soit le tableau carré de neuf nombres a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

On appelle déterminant du troisième ordre correspondant du tableau (1) *le nombre désigné par le symbole*:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

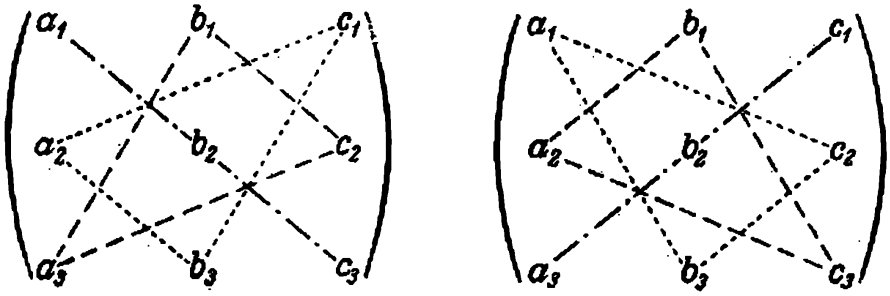
et défini par l'égalité

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3. \tag{2}$$

Les nombres a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 sont appelés *éléments du déterminant*. Les éléments a_1, b_2, c_3 sont disposés sur la diagonale *principale* du déterminant, les éléments a_3, b_2, c_1 constituent sa diagonale non principale.

Attirons l'attention du lecteur sur le fait que les trois premiers termes de la somme figurant au second membre de l'égalité (2) sont les produits des éléments du déterminant pris comme indiqué par les différents traits pointillés sur le schéma ci-dessous à gauche. Pour obtenir les trois autres termes de la somme figurant au second

membre de l'égalité (2) il faut prendre les produits des éléments du déterminant comme indiqué par les différents traits pointillés de la partie droite du schéma et changer ensuite le signe de chacun des produits obtenus.



La règle que nous venons d'indiquer, appelée règle du triangle ou règle de Sarrus, permet d'écrire sans difficultés la formule (2) ainsi que de calculer un déterminant du troisième ordre dont les éléments numériques sont donnés (sans écrire au préalable la formule (2)).

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 3\cdot 2+(-2)\cdot 0\cdot 1-2\cdot 1\cdot 1- \\ -3\cdot 0\cdot 3-(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-12.$$

9. Les déterminants sont largement appliqués tant dans les mathématiques que dans leurs applications. Nous donnerons, par la suite, l'application des déterminants du troisième ordre pour la discussion et la solution des systèmes de trois équations du premier degré à trois inconnues. Mais nous devons pour cela prendre connaissance de certaines propriétés des déterminants. Le numéro suivant donnera une série de propriétés importantes des déterminants. Nous donnerons toutes les explications à propos des déterminants du troisième ordre ; il faut cependant avoir en vue que ces propriétés sont caractéristiques pour les déterminants de tous les ordres (nous donnons un aperçu des déterminants d'ordre supérieur à trois à la fin du présent appendice).

10. Propriété 1. *La valeur du déterminant ne change pas si l'on remplace toutes ses lignes par ses colonnes, à condition que la première ligne soit remplacée par la première colonne et ainsi de suite, c'est-à-dire*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Cette propriété peut également être exprimée comme suit: *si l'on intervertit les éléments du déterminant disposés symétriquement par rapport à la diagonale principale, la valeur du déterminant demeure inchangée.*

Il suffit pour prouver cette propriété d'appliquer la règle du triangle aux deux membres de l'égalité (3) et de comparer les résultats obtenus.

R e m a r q u e. La propriété 1 signifie que les lignes et les colonnes du déterminant sont à parité égale, c'est pourquoi il suffira de prouver les propriétés se rapportant aux lignes et aux colonnes seulement pour les lignes ou seulement pour les colonnes.

P r o p r i é t é 2. *La permutation de deux lignes ou de deux colonnes équivaut à la multiplication du déterminant par* —1.

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Pour démontrer cette propriété, il suffit d'appliquer la règle de Sarrus aux membres de l'égalité (4) et de comparer les résultats obtenus (on établit de même des égalités analogues pour les permutations des autres lignes du déterminant).

P r o p r i é t é 3. *Si un déterminant comprend deux lignes identiques ou deux colonnes identiques il est égal à zéro.*

En effet, soit Δ un déterminant quelconque comprenant deux colonnes identiques. Si nous intervertissons l'ordre de ces colonnes, le déterminant changera de signe en vertu de la propriété 2. Mais d'autre part, étant donné que les colonnes interverties sont identiques, leur permutation ne peut modifier le déterminant. Par conséquent, $\Delta = -\Delta$, c'est-à-dire $2\Delta = 0$ et $\Delta = 0$.

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 17 \\ 5 & 5 & 8 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

P r o p r i é t é 4. *La multiplication de tous les éléments d'une colonne ou d'une ligne par un nombre quelconque k équivaut à la multiplication du déterminant par k.*

Cette propriété peut être énoncée comme suit: *on peut faire sortir du déterminant le facteur commun des éléments d'une colonne ou d'une ligne.*

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Pour démontrer cette propriété il suffit de remarquer que le déterminant est une somme dont chaque terme a pour facteur un élément de chaque ligne et un élément de chaque colonne (voir formule (2), n° 8).

Propriété 5. *Si tous les éléments d'une colonne ou d'une ligne sont nuls, le déterminant est nul.*

Cette propriété est un cas particulier de la précédente (pour $k = 0$).

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Propriété 6. *Si les éléments correspondants de deux lignes ou de deux colonnes sont proportionnels, le déterminant est nul.*

Cette propriété découle des propriétés 4 et 3. En effet, si les éléments de deux colonnes du déterminant sont proportionnels, on obtient les éléments de l'un en multipliant les éléments de l'autre par un certain facteur commun. En mettant ce nombre en facteur nous obtenons un déterminant ayant deux colonnes identiques et donc nul en vertu de la propriété 3.

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 10 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 0.$$

Propriété 7. *Si chaque élément de la n-ième colonne ou de la n-ième ligne d'un déterminant est la somme de deux termes, le déterminant peut être représenté comme la somme de deux déterminants dont l'un aura pour éléments de la n-ième colonne (ou de la n-ième ligne) le premier des deux termes de cette somme, et le deuxième, dans la n-ième colonne (ou la n-ième ligne) les deuxièmes termes de cette somme, les autres lignes et les autres colonnes des deux déterminants restant identiques.*

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2' + a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3' + a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Pour démontrer cette propriété, il suffit d'appliquer la règle du triangle aux déterminants des deux membres de l'égalité et de comparer les résultats obtenus.

Propriété 8. *Si l'on ajoute aux éléments d'une colonne ou d'une ligne les éléments correspondants d'une autre colonne ou d'une autre ligne, multipliés par un facteur quelconque, la valeur du déterminant ne changera pas.*

La propriété 8 découle des propriétés 7 et 6. Montrons-le par un exemple. Supposons qu'on ait ajouté aux éléments d'une colonne les éléments d'une autre colonne multipliés par un certain nombre k. En vertu de 7 nous avons:

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Le deuxième déterminant a deux colonnes proportionnelles. Donc, en vertu de la propriété 6, il est nul. Nous trouvons l'égalité

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

qui exprime précisément la propriété du déterminant que nous avons énoncée.

Les autres propriétés des déterminants sont liées à la notion de complément algébrique et de mineur.

§ 4. COMPLÉMENTS ALGÉBRIQUES ET MINEURS

11. Considérons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Par définition (v. n° 8),

$$\Delta = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3. \qquad (2)$$

Rassemblons ici les termes contenant le même élément du déterminant et prenons cet élément pour facteur, la quantité restant entre parenthèses est appelée *complément algébrique* de cet élément. Nous désignerons le complément algébrique d'un élément par une lettre majuscule de même nom et portant le même indice que l'élément considéré. Ainsi le complément algébrique de l'élément a_1 sera désigné par A_1, celui de b_1 par B_1 et ainsi de suite.

Propriété 9. *Le déterminant est égal à la somme des produits des éléments d'une colonne (ou d'une ligne) quelconque et de leurs compléments algébriques.*

Autrement dit, les égalités suivantes

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, \qquad \Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1, \tag{3}$$

$$\Delta = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3, \qquad \Delta = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2, \tag{4}$$

$$\Delta = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3, \qquad \Delta = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3, \tag{5}$$

sont vraies.

Pour démontrer, par exemple, la première de ces égalités il suffit d'écrire le deuxième membre de la formule (2) sous la forme

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1);$$

les grandeurs entre parenthèses sont les compléments algébriques de a_1, a_2, a_3, c'est-à-dire

$$b_2c_3 - b_3c_2 = A_1; \qquad b_3c_1 - b_1c_3 = A_2; \qquad b_1c_2 - b_2c_1 = A_3.$$

D'où

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3,$$

ce qu'il fallait démontrer. Les autres équations (3-5) se démontrent de façon analogue. On appelle les formules (3-5) développement du déterminant suivant les éléments de telle colonne ou de telle ligne (la première formule donne le développement suivant les éléments de la première colonne, etc.).

12. On appelle *mineur* d'un élément quelconque du déterminant le déterminant obtenu en supprimant dans le déterminant donné la ligne et la colonne à l'intersection desquelles se trouve l'élément considéré. Par exemple, l'élément a_1 du déterminant Δ a pour mineur le déterminant $\begin{vmatrix} b_2c_2 \\ b_3c_3 \end{vmatrix}$, le mineur de l'élément b_1 sera le déterminant $\begin{vmatrix} a_2c_2 \\ a_3c_3 \end{vmatrix}$, etc.

Il s'avère que *le complément algébrique de tout élément du déterminant est égal au mineur de cet élément pris avec le signe qui lui est propre si la somme des indices de la colonne et de la ligne de l'élément considéré est un nombre pair et avec le signe contraire si c'est un nombre impair.* Pour se convaincre de la justesse de cette proposition le lecteur doit examiner les compléments algébriques de tous les éléments du déterminant et les comparer aux mineurs.

Ce que nous venons d'énoncer facilite considérablement l'utilisation des formules (3-5), car cela permet de poser les compléments algébriques des éléments du déterminant en regardant purement et simplement ce déterminant. Il est utile ce faisant d'user du schéma

suivant :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix},$$

où le signe + indique la place des éléments dont les compléments algébriques sont égaux aux mineurs pris avec leur propre signe.

Exemple. Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix},$$

en le développant suivant les éléments de la première ligne.

Solution.

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 19 \\ 9 & 17 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 8.$$

Remarque. On peut simplifier le calcul du déterminant en effectuant le développement suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne si on a préalablement transformé le déterminant à l'aide de la propriété 8. En multipliant les éléments d'une ligne ou d'une colonne par un facteur quelconque et en ajoutant ensuite le résultat à une autre ligne ou à une autre colonne, nous obtiendrons un déterminant égal au déterminant donné ; un choix judicieux du facteur permet de faire en sorte qu'un des éléments du déterminant obtenu soit nul. Une double application de cette opération peut donner un déterminant égal au premier dont deux éléments seront nuls dans la même ligne ou la même colonne. En calculant le déterminant par développement suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne il ne nous restera plus qu'à calculer un seul mineur car les deux autres seront multipliés par des éléments égaux à zéro. Ainsi, par exemple, pour calculer le déterminant donné dans l'exemple précédent, transformons-le comme suit : ajoutons aux éléments de sa deuxième colonne les éléments de la première multipliés par —2, puis ajoutons aux éléments de la troisième colonne les éléments de la première multipliés par —3. Il vient

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

En développant suivant les éléments de la première ligne nous trouvons

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

13. Nous allons énoncer à présent plusieurs propositions importantes pour la résolution et la discussion d'un système d'équations du premier degré à trois inconnues *.

* Des propositions analogues se rapportant aux déterminants d'ordre supérieur sont utilisées pour la résolution et la discussion des systèmes d'équations du premier degré à n inconnues.

Soit le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Développons-le suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne, par exemple suivant les éléments de la première colonne

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3. \tag{6}$$

Remplaçons dans le deuxième membre de cette égalité les nombres a_1, a_2, a_3 par des nombres quelconques h_1, h_2, h_3; le deuxième membre de l'égalité (6) sera alors le développement suivant les éléments de la première colonne du déterminant que l'on obtient à partir du déterminant donné en remplaçant les éléments de sa première colonne par les nombres h_1, h_2, h_3:

$$h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3 = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Choisissons en qualité de h_1, h_2, h_3 les éléments de la deuxième ou de la troisième colonne du déterminant donné (autrement dit, prenons $h_1 = b_1$, $h_2 = b_2$, $h_3 = b_3$ ou $h_1 = c_1$, $h_2 = c_2$, $h_3 = c_3$). Dans ce cas, le déterminant (7) aura deux colonnes identiques, donc sera nul. Nous obtenons l'égalité

$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0 \tag{8}$$

ou

$$c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0. \tag{9}$$

Si nous nous basons sur le développement du déterminant suivant les éléments de sa deuxième colonne, nous aurons les égalités suivantes par analogie

$$a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 = 0, \tag{10}$$

$$c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3 = 0. \tag{11}$$

Le développement suivant les éléments de la troisième colonne nous donnera

$$a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 = 0, \tag{12}$$

$$b_1C_1 + b_2C_2 + b_3C_3 = 0. \tag{13}$$

De plus, six égalités semblables auront lieu pour les lignes du déterminant.

Ce que nous venons d'énoncer nous permet de formuler la propriété suivante des déterminants.

Propriété 10. *La somme des produits des éléments d'une colonne (ou d'une ligne) quelconque du déterminant par les compléments algébriques des éléments correspondants d'une autre colonne (d'une autre ligne) est nulle.*

§ 5. SOLUTION ET DISCUSSION D'UN SYSTÈME DE TROIS ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À TROIS INCONNUES

14. Soit le système de trois équations

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= h_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= h_3, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où les inconnues sont x, y, z (les coefficients a_1, b_1, . . ., c_3 et les termes constants h_1, h_2, h_3 sont supposés donnés).

Le système de trois nombres x_0, y_0, z_0 est appelé *solution* du système (1), si ces nombres satisfont aux équations du système (1), c'est-à-dire si en remplaçant les symboles x, y, z par les nombres x_0, y_0, z_0 chacune des équations (1) devient une identité arithmétique. Recherchons toutes les solutions du système (1). Faisons parallèlement la discussion de ce système en établissant les cas où le système (1) aura une seule solution, les cas où il en aura plus d'une et ceux où il n'en aura aucune.

Le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

jouera un rôle essentiel dans nos raisonnements ; il est composé des coefficients des inconnues et on l'appelle *déterminant du système donné.*

Nous désignerons, comme antérieurement, par les symboles $A_1, A_2, \ldots$ les compléments algébriques des éléments $a_1, a_2, \ldots$ du déterminant. Multiplions les deux membres de la première équation du système (1) par A_1, de la deuxième par A_2, de la troisième par A_3, puis faisons la somme membre à membre. On aura :

$$(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)\,x + (b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3)\,y + \\ + (c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3)\,z = (h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3).$$

D'où et en vertu des propriétés 9 et 10, nous aurons (voir la première égalité de (3), n° 11, ainsi que les égalités (8) et (9), n° 13) :

$$\Delta \cdot x = h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3. \tag{3}$$

Nous trouverons de même :

$$\Delta \cdot y = h_1 B_1 + h_2 B_2 + h_3 B_3, \tag{4}$$

$$\Delta \cdot z = h_1 C_1 + h_2 C_2 + h_3 C_3. \tag{5}$$

Les deuxièmes membres des équations (3), (4) et (5) seront désignés respectivement par Δ_x, Δ_y, Δ_z. Les équations (3), (4) et (5) prendront alors la forme

$$\Delta \cdot x = \Delta_x; \quad \Delta \cdot y = \Delta_y; \quad \Delta \cdot z = \Delta_z, \tag{6}$$

et comme il découle du n° 13 (voir, par exemple, formule (7), n° 13) :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Il est utile de remarquer que les déterminants Δ_x, Δ_y, Δ_z sont obtenus à partir du déterminant Δ en remplaçant respectivement leur première, deuxième et troisième colonne par une colonne composée des termes constants du système donné.

Supposons $\Delta \neq 0$. Nous aurons alors par l'équation (6)

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{8}$$

Ces formules fournissent de toute évidence la solution du système réduit (6). Elles fournissent également la solution du système initial (1). Pour le démontrer, il faut remplacer dans les équations du système (1) x, y, z par leurs expressions (8) et se convaincre que ces valeurs satisfont aux équations (1). Faisons-le pour la première équation ; il vient :

$$a_1 \frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1 \frac{\Delta_y}{\Delta} + c_1 \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} a_1 (h_1 A_1 + h_2 A_2 + h_3 A_3) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta} b_1 (h_1 B_1 + h_2 B_2 + h_3 B_3) + \frac{1}{\Delta} c_1 (h_1 C_1 + h_2 C_2 + h_3 C_3) =$$

$$= \frac{1}{\Delta} h_1 (a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1) + \frac{1}{\Delta} h_2 (a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta} h_3 (a_1 A_3 + b_1 B_3 + c_1 C_3).$$

Mais en vertu de la propriété (9) des déterminants

$$a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 = \Delta,$$

et en vertu de la propriété (10)

$$a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2 = 0,$$

$$a_1 A_3 + b_1 B_3 + c_1 C_3 = 0.$$

Par conséquent,

$$a_1\frac{\Delta_x}{\Delta}+b_1\frac{\Delta_y}{\Delta}+c_1\frac{\Delta_z}{\Delta}=h_1,$$

c'est-à-dire les nombres x, y, z déterminés par les formules (8) satisfont à la première équation du système donné. On démontre de façon analogue qu'ils satisfont aux deux autres équations.

Tout ce que nous venons d'énoncer nous permet de conclure que si $\Delta \neq 0$, le système (1) possède une seule solution déterminée par les formules (8).

Exemple. Soit le système

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z&=4,\\ 3x-5y+3z&=1,\\ 2x+7y-z&=8. \end{aligned}\right\}$$

Trouver toutes ses solutions.

Solution. Calculons le déterminant du système :

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}=33.$$

Etant donné que $\Delta \neq 0$, le système donné n'a qu'une seule solution qui sera fournie par les formules (8). D'après les formules (7) nous avons

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 8 & 7 & -1\end{vmatrix}=33,\qquad \Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ 3 & 1 & 3\\ 2 & 8 & -1\end{vmatrix}=33,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -5 & 1\\ 2 & 7 & 8\end{vmatrix}=33.$$

Par conséquent, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

15. Supposons à présent que le déterminant du système (1) soit nul.

Si Δ étant nul, un seul des déterminants Δ_x, Δ_y, Δ_z est différent de zéro, le système (1) n'a pas de solution (on dit que les équations du système sont incompatibles).

En effet, si $\Delta = 0$ et si l'un quelconque des déterminants Δ_x, Δ_y, Δ_z n'est pas nul, l'une au moins des égalités (6) est impossible, autrement dit le système (6) n'a pas de solution.

Mais en ce cas le système (1) n'a pas de solution, car le système (6) découle du système (1) et toute solution du système (1), si elle existait, serait aussi une solution du système (6). Par exemple, le système

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2,\\ 3x+2y+2z&=1,\\ 4x+3y+3z&=4 \end{aligned}\right\}$$

n'a pas de solution car $\Delta = 0$ et $\Delta_y = 1 \neq 0$. On peut également se convaincre directement que les équations données sont incompatibles. En effet, en ajoutant membre à membre la première à la deuxième et en soustrayant le résultat obtenu de la troisième, nous trouvons $0 = 1$ ce qui est une égalité fausse.

Il nous reste à examiner le cas où $\Delta = 0$ et $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$. Mais nous verrons ce cas un peu plus tard, après avoir achevé la discussion des systèmes dits homogènes.

16. On appelle *homogène* tout système de trois équations du premier degré à trois inconnues de la forme

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

c'est-à-dire un système d'équations dont les seconds membres sont nuls. Il est évident qu'un tel système possède toujours la solution $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, que l'on appelle solution banale. Si $\Delta \neq 0$, cette solution est la seule.

Nous allons démontrer que si $\Delta = 0$, le système homogène (9) possède une infinité de solutions non nulles. (Dans ce cas une de ses équations découle des deux autres ou deux des équations découlent de la troisième.)

Faisons d'abord la démonstration en supposant que l'un au moins des mineurs du déterminant Δ est différent de zéro.

Soit par exemple

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Cette condition étant remplie, les deux premières équations du système (9) ont une infinité de solutions communes non nulles définies par les formules

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} t, \quad y = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} t, \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} t \tag{10}$$

quel que soit t (voir n° 6, formules (8)). Il est aisé de se convaincre que si $\Delta = 0$, tous ces nombres satisfont également à la troisième équation du système (9). En effet, en remplaçant les inconnues par ces nombres dans le premier membre de la troisième équation du système (9), nous trouvons:

$$a_3x + b_3y + c_3z = \left(a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) t = \Delta \cdot t.$$

Cette substitution nous donne en fin de compte le résultat zéro, car par énoncé $\Delta = 0$. Par conséquent, les formules (10) pour toute

valeur de t définissent les solutions du système (9). Si $t \neq 0$, cette solution ne sera pas nulle. Dans le cas considéré le système ne comprend que deux équations essentielles (la troisième découle des deux premières).

Supposons à présent que tous les mineurs du déterminant soient nuls ; chaque couple d'équations (9) a alors des coefficients proportionnels et, par conséquent, quel que soit le choix de deux équations que nous fassions dans le système (9), l'une d'elles sera toujours obtenue de l'autre en multipliant tous ses coefficients par un facteur commun (voir n° 7 à ce sujet). Le système (9) ne comprendra donc qu'une équation essentielle (dont les deux autres en découleront). Un tel système a de toute évidence une infinité de solutions non nulles (car on peut assigner à deux des inconnues des valeurs numériques arbitraires en définissant la troisième à l'aide de l'équation unique du système). Nous avons donc démontré notre proposition. Le résultat obtenu peut être formulé comme suit.

Pour qu'un système homogène (9) *ait des solutions non nulles, il faut et il suffit que* $\Delta = 0$.

Exemple 1. Le système

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z&=0,\\ 3x-5y+3z&=0,\\ 2x+7y-z&=0 \end{aligned}\right\}$$

n'a qu'une solution nulle, car

$$\Delta = 33 \neq 0.$$

Exemple 2. Le système

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0,\\ 2x+3y+2z&=0,\\ 4x+5y+4z&=0 \end{aligned}\right\}$$

possède une infinité de solutions non nulles, car

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Toutes les solutions sont déterminées par les formules (10) en vertu desquelles

$$x = -t, \quad y = 0, \quad z = t,$$

t étant quelconque.

Exemple 3. Le système

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0,\\ 2x+2y+2z&=0,\\ 3x+3y+3z&=0 \end{aligned}\right\}$$

a également une infinité de solutions non nulles, car $\Delta = 0$. Dans le cas qui nous intéresse, tous les mineurs du déterminant sont nuls et le système se réduit à une équation $x + y + z = 0$. Toute solution du système comprend trois nombres dont deux, x et y, sont quelconques et $z = -x - y$.

17. Revenons à notre système quelconque non homogène

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=h_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=h_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z&=h_3. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Nous allons démontrer que si $\Delta = 0$ et que si le système (1) possède ne serait-ce qu'une solution, elle possède une infinité de solutions différentes.

Admettons que les nombres x_0, y_0, z_0 constituent la solution du système (1); en remplaçant les inconnues par x_0, y_0, z_0 dans les équations (1), nous obtenons les identités arithmétiques:

$$\left.\begin{aligned} a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0&=h_1,\\ a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0&=h_2,\\ a_3x_0+b_3y_0+c_3z_0&=h_3. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Soustrayons membre à membre les identités (11) des équations correspondantes (1) (nous soustrairons la première identité (11) de la première équation (1), la deuxième identité de la deuxième équation, et ainsi de suite). Il vient

$$\left.\begin{aligned} a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)+c_1(z-z_0)&=0,\\ a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)+c_2(z-z_0)&=0,\\ a_3(x-x_0)+b_3(y-y_0)+c_3(z-z_0)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Désignons les valeurs entre parenthèses comme suit

$$x-x_0=u, \qquad y-y_0=v, \qquad z-z_0=w. \tag{13}$$

Les équations (12) prendront à présent la forme:

$$\left.\begin{aligned} a_1u+b_1v+c_1w&=0,\\ a_2u+b_2v+c_2w&=0,\\ a_3u+b_3v+c_3w&=0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

C'est un système homogène de trois équations du premier degré ayant pour inconnues u, v, w, et dont les coefficients sont les mêmes que ceux du système (1) donné. Il est appelé *système homogène correspondant au système non homogène* (1).

Etant donné que par hypothèse $\Delta = 0$ en vertu du n° 16 le système homogène (14) possède une infinité de solutions différentes. Il s'ensuit que le système (1) donné possède également une infinité de solutions. Plus exactement, en vertu de l'égalité (13), à chaque solution u, v, w du système (14) correspond une solution

$$\begin{aligned} x&=x_0+u,\\ y&=y_0+v,\\ z&=z_0+w \end{aligned}$$

BeatriceGloria_personal library

du système (1). Ce qui prouve notre proposition.

En vertu de ce qui vient d'être démontré, nous aurons la proposition suivante. *Si* $\Delta = 0$ *et également* $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$, *le système* (1) *possède soit une infinité de solutions, soit aucune* (pour une infinité de solutions au moins une des équations découle des autres); un tel système est dit *indéterminé.*

Exemple 1. Le système

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ 2x+2y+2z&=3,\\ 3x+3y+3z&=4 \end{aligned}\right\}$$

(qui satisfait aux conditions $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$) n'a pas de solution.

En effet, rien qu'en prenant les deux premières équations de ce système, elles sont déjà incompatibles, car, en multipliant la première par 2 et en la retranchant ensuite membre à membre de la deuxième, nous trouvons l'égalité fausse $0 = 1$.

Exemple 2. Le système

$$\left.\begin{aligned} 3x+y-z&=1,\\ 5x+2y+3z&=2,\\ 8x+3y+2z&=3 \end{aligned}\right\}$$

(qui satisfait aux conditions $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$) possède une infinité de solutions. En effet, la troisième équation de ce système est obtenue par addition des deux premières. Par conséquent, le système considéré n'a que deux équations essentielles

$$\left.\begin{aligned} 3x+y-z&=1,\\ 5x+2y+3z&=2. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Pour trouver toutes leurs solutions communes nous écrirons le système (*) comme suit

$$\left.\begin{aligned} 3x+y&=1+z,\\ 5x+2y&=2-3z \end{aligned}\right\}$$

et nous considérons qu'une certaine valeur numérique est assignée à z. E appliquant les formules (8), n° 2, nous trouvons

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1+z & 1\\ 2-3z & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}}=5z, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1+z\\ 5 & 2-3z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}}=1-14z.$$

Les nombres x et y avec le nombre z constituent la solution du système donné. Le système donné a une infinité de solutions, étant donné que la valeur numérique de z peut être choisie arbitrairement.

§ 6. NOTIONS SUR LES DÉTERMINANTS D'ORDRE QUELCONQUE

18. Pour le problème général de la résolution et de la discussion d'un système d'équations à plusieurs inconnues et en de nombreux cas de calculs mathématiques, on est amené à avoir recours à des

déterminants d'ordre n ($n = 2, 3, 4, \ldots$). La théorie des déterminants d'ordre quelconque est analogue dans ses traits généraux à la théorie des déterminants du troisième ordre ; cependant pour donner un exposé complet avec tous ses détails il est indispensable d'énoncer plusieurs propositions supplémentaires, ce qui présente certaines difficultés. Cette théorie, de même que la théorie des systèmes d'équations du premier degré à n inconnues, est exposée dans les cours d'algèbre supérieure.

Nous nous bornerons aux indications suivantes :

1. Un déterminant d'ordre n est défini par un tableau carré de nombres (éléments du déterminant) de n lignes et de n colonnes. Le symbole est le même que pour le déterminant de deuxième et troisième ordre.

2. On appelle mineur d'un élément du déterminant d'ordre n le déterminant d'ordre $n - 1$ obtenu à partir du déterminant donné en supprimant la colonne et la ligne à l'intersection desquelles se trouve cet élément.

3. Le complément algébrique d'un élément du déterminant est le mineur de cet élément pris avec le signe qui lui est propre, si la somme des indices de la ligne et de la colonne à l'intersection desquelles cet élément se trouve est un nombre pair, et avec le signe moins, si ce nombre est impair.

4. Le déterminant est égal à la somme des produits des éléments de l'une quelconque de ses lignes (de ses colonnes) par leurs compléments algébriques respectifs. Le calcul d'un déterminant d'ordre n se réduit ainsi au calcul d'un déterminant d'ordre $n - 1$.

5. Toutes les propriétés des déterminants que nous venons d'énoncer se rapportent aux déterminants d'ordre quelconque.

Exemple. Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}.$$

Solution. En développant ce déterminant suivant les éléments de la première ligne, c'est-à-dire en le représentant sous forme d'une somme de produits des éléments de la première ligne par leurs compléments algébriques, nous trouvons

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 296.$$

Remarque. On peut simplifier le calcul en appliquant au préalable la propriété 8 (voir n° 10 et la remarque à la fin du n° 12).